УДК 519.816

С. В. Каденко
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Метод сортування покривних дерев

Статтю присвячено розробці методу сортування покривних дерев за діаметром. Покривні дерева широко застосовуються в теорії підтримки прийняття рішень, зокрема для отримання найбільш повної інформації з матриць експертних парних порівнянь. Метод дозволяє, за необхідності, без суттєвої втрати інформації знизити трудомісткість комбінаторного перебору базисних множин парних порівнянь під час обчислення відносних ваг альтернатив. Запропонований метод базується на певних когнітивних особливостях процесу експертного оцінювання множини альтернатив і використовує бієктивну відповідність між покривними деревами та кодами Прюфера.

***Ключові слова**: експертне оцінювання, матриця парних порівнянь, покривне дерево, діаметр графа, код Прюфера.*

Вступ

Покривним деревом графа G називається граф типу дерева T (граф, у якому кожну пару вершин поєднує рівно 1 шлях), який охоплює усі вершини графа G: $\forall g \in G : g \in T$. Покривні дерева посідають особливе місце в теорії графів унаслідок їхнього широкого застосування в різних сферах, зокрема в комбінаториці [1], електродинаміці [2, 3], економіці та логістиці [4].

У теорії підтримки прийняття рішень покривні дерева також відіграють важливу роль, адже на перебиранні покривних дерев базується цілий клас методів агрегації експертних парних порівнянь (ПП) як повних, так і неповних [3]. Покривні дерева надають можливість отримати максимальну кількість інформації з матриці парних порівнянь (МПП) заданої множини альтернатив. Кожній базисній множині ПП n альтернатив відповідає покривне дерево певної конфігурації. Так, наприклад, якщо усі альтернативи з множини $\{A_i;\ i = 1..n\}$ порівнюються з першою альтернативою A_1, то відповідними ПП заповнюється перший рядок МПП (як у методі «лінія» [5]). Відповідне покривне дерево має конфігурацію типу «зірка» з вершиною, що відповідає альтернативі A_1 в центрі (рис. 1).

Якщо ж кожна альтернатива A_i порівнюється лише з наступною за номером альтернативою з множини A_{i+1}, то відповідні ПП будуть розташовані над головною

© С. В. Каденко

діагоналлю МПП, а граф покривного дерева матиме конфігурацію типу «шлях» (рис. 2).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \square & & \cdots & \square \end{bmatrix}$$

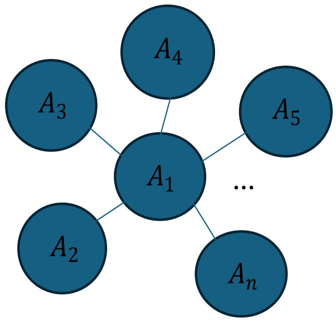

Рис. 1. Приклад графу типу «зірка» та відповідні елементи МПП

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \square & \square & \square \\ \square & a_{22} & a_{23} & \square & \square \\ \square & \square & a_{33} & \ldots & \square \\ \square & \square & \square & \ldots & a_{(n-1)n} \\ \square & \square & \square & \square & a_{nn} \end{bmatrix}$$

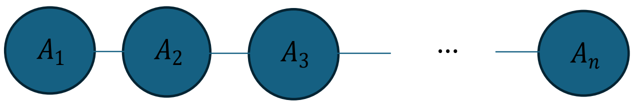

Рис. 2. Приклад графу типу «шлях» і відповідні елементи МПП

За теоремою Кейлі про дерева [1], загальна кількість покривних дерев, які можуть бути побудовані на повному графі, що має n вершин, дорівнює n^{n-2}. Відповідно, зі зростанням кількості вершин n різко зростає і кількість дерев, які можна на них побудувати. У контексті ПП це означає, що зі зростанням кількості альтернатив, які порівнюються в ході експертизи, різко збільшується обчислювальна складність методу агрегації ПП, який базується на комбінаторному перебиранні покривних дерев на множині переваг [6–8]. Так, наприклад, для визначення відносних ваг $n = 6$ альтернатив за повною МПП слід обробити $6^{6-2} = 1296$ покривних дерев і відповідних базисних множин ПП, для визначення ваг $n = 7$ альтернатив — $7^{7-2} = 16807$ дерев тощо. Якщо в експертизі бере участь декілька експертів, кожен з яких будує свою МПП, то вказану кількість дерев слід помножити на число експертів. Більш того, якщо йдеться про багаторівневу ієрархію критеріїв, які слід попарно порівнювати за вагомістю, то процедура ПП критеріїв має застосовуватися для кожного фрагмента цієї ієрархії, що додатково підвищує обчислювальну складність процедури. Отже, висока обчислювальна складність накладає певні обмеження на застосування комбінаторного методу, особливо, для великих розмірностей множини порівнюваних об’єктів n.

Відтак, якщо немає можливості повного перебирання базисних множин ПП для кожної множини альтернатив чи критеріїв, то постає задача визначення найбільш інформативних, а відтак, пріоритетних, із цих множин. Для її розв’язання пропонується скористатися певними когнітивними особливостями експертного оцінювання та принципами теорії графів.

Огляд літератури та поточний стан проблеми

Теорема про дерева сформульована Артуром Кейлі [1], який займався дослідженнями в області комбінаторики. Пізніше Прюфер запропонував оригінальне доведення теореми [9], сконструювавши бієктивне відображення множини дерев у множину елементів багатовимірного масиву кодів. З того часу коди Прюфера активно використовувалися для розв'язання різних задач, у яких задіяні покривні дерева. Зокрема, можна згадати низку досліджень останніх кількох десятиліть [10–12]. Застосування комбінаторного підходу до агрегації експертних ПП вперше запропоновано Віталієм Циганком у [6]. У [7] продемонстровано переваги комбінаторного методу над іншими методами агрегації. У [13, 14] комбінаторний метод був, фактично, «перевідкритий» дослідниками з Великої Британії та описаний у термінах теорії графів. У [15] доведено математичну еквівалентність методу геометричного середнього та комбінаторного методу для повних МПП. У [3] доведено математичну еквівалентність логарифмічного методу найменших квадратів (ЛМНК) і комбінаторного методу для повних і неповних МПП, а також показаний взаємозв'язок між теорією покривних дерев і правилами Кірхгофа: в електродинаміці покривні дерева застосовуються для розрахунку розгалужених електричних кіл. У [16] комбінаторний метод узагальнений на випадок групових ПП. У працях [17, 18] комбінаторний підхід використовується для підвищення узгодженості експертних оцінок. У [8] запропоновано модифікацію комбінаторного методу, яка дозволяє визначити повноту, детальність та узгодженість експертних оцінок перед їхньою агрегацією, та присвоїти їм відповідні ваги. Там же, а також у більш пізніх працях [19, 20] продемонстровано, що структури переваг на множині альтернатив, яким відповідають графи меншого діаметру, є стійкішими до експертних помилок. Напрацювання цих досліджень дозволяють визначити принципи, які можна покласти в основу алгоритму розв'язання задачі класифікації покривних дерев за стійкістю до експертних помилок. При цьому, в явному вигляді ані задача, ані спосіб її розв'язання не наводяться в жодній з наведених публікацій.

Принцип сортування покривних дерев за стійкістю

Якщо задано МПП n альтернатив, то кожне покривне дерево відповідає певній базисній множині ПП (рис. 1, 2). Відповідно до комбінаторного методу [8], за кожною такою базисною множиною будується ідеально узгоджена МПП (ІУМПП). Втім, якщо під час введення ПП із заданої базисної множини експерт припускається помилок (відхиляється від істинних значень ваг альтернатив), то й ІУМПП, побудована на основі цієї базисної множини буде менш точною.

Розглянемо ілюстративний приклад. Нехай під час порівняння 5 альтернатив, дерево, що відповідає базисній множині ПП $\{a_{34}, a_{24}, a_{12}, a_{15}\}$, має вигляд «шляху» $(A_3 - A_4 - A_2 - A_1 - A_5)$ (рис. 3).

За означенням ідеальної узгодженості, усі елементи ІУМПП мають задовольняти правилам оберненої симетричності та транзитивності (приклад — ІУМПП на рис. 3):

$$\forall i,k,j \in \{1..n\}: a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}; a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} = \frac{w_i/w_k}{w_j/w_k} = a_{ik}a_{kj}, \quad (1)$$

де w_i та w_j — відносні ваги альтернатив A_i та A_j відповідно. Отже в даному прикладі, для підрахунку елемента ІУМПП a'_{35}, побудованої на основі цієї базисної множини, необхідно скористатися формулою:

$$a'_{35} = a_{34}a'_{45} = a_{34}a'_{42}a'_{25} = \frac{a_{34}a_{15}}{a_{24}a_{12}}.$$

1	2	3	6	9
0,5	1	1,5	3	4,5
0,333333	0,666667	1	2	3
0,166667	0,333333	0,5	1	1,5
0,111111	0,222222	0,333333	0,666667	1

Рис. 3. Приклад дерева типу «шлях» на множині з 5 альтернатив і відповідна МПП. Кольором підсвічена базисна множина ПП

Штрихами у формулі позначаються елементи, що визначаються за правилами (1) на основі наявних експертних ПП. Якщо припустити, що під час оцінки ПП a_{34} та a_{15} експерт помиляється на максимальну величину ε у бік збільшення, а під час оцінки ПП a_{24} та a_{12} — у бік зменшення, то відновлений елемент ІУМПП a'_{35} суттєво (приблизно на 4ε) відхилиться від істинного значення:

$$a'_{35} = \frac{a_{34}a_{15}(1+\varepsilon)^2}{a_{24}a_{12}(1-\varepsilon)^2} = \frac{a_{34}a_{15}}{a_{24}a_{12}}\left(1 + \frac{4\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}\right).$$

Якщо $\varepsilon \ll 1$, то похибка визначення a'_{35} буде трохи перевищувати величину 4ε.

Екстраполюємо цей приклад на випадок покривного дерева типу «шлях» із діаметром $(n-1)$, де n — кількість альтернатив, що порівнюються. Нехай акумульована відносна похибка експертного оцінювання ПП у чисельнику дробу дорівнює $(1+\varepsilon)^{n_1}$, а в знаменнику — $(1-\varepsilon)^{n_2}$, де $(n_1+n_2) = (n-1)$. За такого «песимістичного» сценарію, якщо $\varepsilon \ll 1$, то максимальна похибка визначення відновленого за формулами (1) елемента ІУМПП перевищить величину $(n-1)\varepsilon$:

$$a'_{i^*j^*} \approx a_{i^*j^*}\left(1 + \frac{(n-1)\varepsilon}{(1-\varepsilon)^{n_2}}\right). \quad (2)$$

Із цих міркувань випливає, що чим більшим є діаметр покривного дерева $d \in \{2, \ldots, (n-1)\}$ (кількість ребер у найдовшому можливому шляху від однієї вершини графа до іншої), яке відповідає певній базисній множині ПП, тим більшою є максимальна можлива похибка обчислення елементів відповідної ІУМПП. Тобто, дерева з більшим діаметром вносять найбільшу можливу похибку в результати експертизи, а дерева з меншим діаметром відповідають базисним множинам ПП, що є більш стійкими до експертних помилок. Відтак, під час агрегації результатів ПП комбінаторним методом [6–8], слід у першу чергу перебирати дерева з меншим діаметром. На цьому ґрунті постає актуальна задача сортування покривних дерев у порядку зростання їхніх діаметрів.

За основу процедури сортування покривних дерев у порядку збільшення діаметрів пропонується взяти так звані коди Прюфера [9]. Код Прюфера — це послідовність із $(n-2)$ номерів вершин графа покривного дерева (від 1 до n), яка однозначно відповідає конкретному вигляду графа.

Процедура побудови дерева за кодом Прюфера виглядає наступним чином. Нехай заданий код Прюфера P з $(n-2)$ номерів вершин графа дерева: $P = \{i_k: k \in \{1, \dots, n-2\}; i_k \in \{1, \dots, n\}\}$. Наприклад, для $n = 5$ вершин код включатиме 3 номери вершин (припустімо $\{1,3,3\}$). Для побудови дерева за цим кодом необхідно $(n-2)$ рази (поки не пройдемо усі елементи коду P) повторити наступні кроки.

1. Знаходимо на множині з n вершин графа вершину з найменшим номером, який не зустрічається в коді P ($i_{\min} \in \{1, \dots, n\}$; $i_{\min} \neg\in P$); у прикладі це вершина з номером 2.

2. Будуємо ребро між цією вершиною та вершиною із першим номером i_1, який зустрічається в коді P; у прикладі йдеться про ребро між вершинами 2 та 1.

3. Виключаємо з коду P елемент, що задіяний на попередньому кроці; у прикладі це елемент $\{1\}$.

У прикладі на 2-й ітерації буде побудоване ребро між вершинами 3 та 1, на 3-й — між вершинами 3 та 4.

Після $(n-2)$ ітерацій у множині з n вершин графа залишиться 2 вершини, які слід з'єднати ребром; у прикладі це вершини 3 та 5. На цьому алгоритм завершує роботу. Дерево, побудоване за кодом з прикладу, включатиме ребра 12, 13, 34 та 35.

У контексті поставленої задачі, описана процедура побудови покривних дерев за кодами Прюфера має дві корисні властивості:

1) ступінь вершини у графі покривного дерева (кількість ребер, які інцидентні цій вершині) рівно на 1 перевищує кількість повторень номера даної вершини у відповідному коді Прюфера;

2) наслідок попередньої властивості: діаметр довільного графа покривного дерева на 1 більше, ніж кількість неповторюваних елементів у відповідному коді Прюфера. Зокрема, коди Прюфера, в яких елементи не повторюються, відповідають деревам типу «шлях» (рис. 2), діаметр яких є максимальним і дорівнює $d = (n-1)$. Водночас, дерева з мінімальним діаметром $d = 2$, тобто графи типу «зірка» (рис. 1), відповідають кодам Прюфера, які включають $(n-2)$ однакових елементи (наприклад, $\{3,3,3\}$ для $n = 5$).

Відтак, задача сортування дерев за діаметром зводиться до сортування відповідних кодів Прюфера за кількістю різних елементів у них. У першу чергу слід перебирати коди, які складаються з $(n-2)$ однакових елементів, потім — коди з $(n-3)$ однаковими елементами тощо. В останню чергу перебиратимуться коди з усіх різних елементів, де кожен номер вершини зустрічається рівно 1 раз. Всередині множин дерев з однаковими діаметрами пропонується сортувати їх у порядку зростання чисел (наприклад, у системі числення з основою n), які можуть бути складені з елементів відповідних кодів Прюфера. Покрокова загальна процедура для повної матриці ПП може виглядати наступним чином:

1) розбиття усієї множини з n^{n-2} кодів Прюфера на підмножини за кількістю повторень однакових елементів;

2) сортування кодів всередині кожної множини в порядку зростання чисел, які складаються з елементів цих кодів;

3) перебирання покривних дерев, що відповідають кодам Прюфера, за сформованим на попередньому кроці переліком.

Приклад сортування за діаметром усіх покривних дерев на 5 вершинах наведений у таблиці.

Покривні дерева на 5 вершинах, упорядковані за діаметром

Діаметр дерева	Номер дерева	Код Прюфера	Перелік ребер графа дерева	Діаметр дерева	Номер дерева	Код Прюфера	Перелік ребер графа дерева
2	1	111	12; 13; 14; 15	3	64	553	15; 25; 34; 35
	2	222	12; 23; 24; 25		65	554	15; 25; 34; 45
	3	333	13; 23; 34; 35	4	66	123	12; 14; 23; 35
	4	444	14; 24; 34; 45		67	124	12; 13; 24; 45
	5	555	15; 25; 35; 45		68	125	12; 13; 25; 45
3	6	112	12; 13; 14; 25		69	132	13; 14; 23; 25
	7	113	12; 13; 14; 35		70	134	12; 13; 34; 45
	8	114	12; 13; 14; 45		71	135	12; 13; 35; 45
	9	115	12; 13; 15; 45		72	142	13; 14; 24; 25
	10	121	12; 13; 15; 24		73	143	12; 14; 34; 35
	11	122	12; 13; 24; 25		74	145	12; 14; 35; 45
	12	131	12; 13; 15; 34		75	152	13; 15; 24; 25
	13	133	12; 13; 34; 35		76	153	12; 15; 34; 35
	14	141	12; 14; 15; 34		77	154	12; 15; 34; 45
	15	144	12; 14; 34; 45		78	213	12; 13; 24; 35
	16	151	12; 14; 15; 35		79	214	12; 14; 23; 45
	17	155	12; 15; 35; 45		80	215	12; 15; 23; 45
	18	211	12; 14; 15; 23		81	231	13; 15; 23; 24
	19	212	12; 14; 23; 25		82	234	12; 23; 34; 45
	20	221	12; 15; 23; 24		83	235	12; 23; 35; 45
	21	223	12; 23; 24; 35		84	241	14; 15; 23; 24
	22	224	12; 23; 24; 45		85	243	12; 24; 34; 35
	23	225	12; 23; 25; 45		86	245	12; 24; 35; 45
	24	232	12; 23; 25; 34		87	251	14; 15; 23; 25
	25	233	12; 23; 34; 35		88	253	12; 25; 34; 35
	26	242	12; 24; 25; 34		89	254	12; 25; 34; 45
	27	244	12; 24; 34; 45		90	312	12; 13; 25; 34
	28	252	12; 24; 25; 35		91	314	13; 14; 23; 45
	29	255	12; 25; 35; 45		92	315	13; 15; 23; 45
	30	311	13; 14; 15; 23		93	321	12; 15; 23; 34
	31	313	13; 14; 23; 35		94	324	13; 23; 24; 45
	32	322	13; 23; 24; 25		95	325	13; 23; 25; 45
	33	323	13; 23; 24; 35		96	341	14; 15; 23; 34
	34	331	13; 15; 23; 34		97	342	13; 24; 25; 34
	35	332	13; 23; 25; 34		98	345	13; 24; 35; 45
	36	334	13; 23; 35; 45		99	351	14; 15; 23; 35
	37	335	13; 23; 35; 45		100	352	13; 24; 25; 35
	38	343	13; 24; 34; 35		101	354	13; 25; 34; 45
	39	344	13; 24; 24; 45		102	412	12; 14; 25; 34
	40	353	13; 25; 34; 35		103	413	13; 14; 24; 35
	41	355	13; 25; 35; 45		104	415	13; 15; 24; 45
	42	411	13; 14; 15; 24		105	421	12; 15; 24; 34
	43	414	13; 14; 24; 45		106	423	14; 23; 24; 35
	44	422	13; 23; 24; 25		107	425	14; 23; 25; 45
	45	424	13; 23; 24; 45		108	431	13; 15; 24; 34
	46	433	14; 23; 34; 35		109	432	14; 23; 25; 34

	47	434	14; 23; 34; 45		110	435	14; 23; 35; 45
	48	441	14;15; 24; 34		111	451	14; 15; 24; 35
	49	442	14; 24; 25; 34		112	452	14; 24; 25; 35
	50	443	14; 24; 34; 35		113	453	14; 34; 25; 35
	51	445	14; 24; 35; 45		114	512	12; 14; 25; 35
	52	454	14; 25; 34; 45		115	513	13; 14; 25; 35
	53	455	14; 25; 35; 45		116	514	13; 14; 25; 45
	54	511	13; 14; 15; 25		117	521	12; 15; 24; 35
	55	515	13; 15; 25; 45		118	523	15; 23; 24; 35
	56	522	15; 23; 24; 25		119	524	15; 23; 24; 45
	57	525	15; 23; 25; 45		120	531	13; 15; 25; 34
	58	533	15; 23; 34; 35		121	532	15; 23; 25; 34
	59	535	15; 23; 35; 45		122	534	15; 23; 34; 45
	60	544	15; 24; 34; 45		123	541	14; 15; 25; 34
	61	545	15; 24; 35; 45		124	542	15; 24; 25; 34
	62	551	14; 15; 25; 35		125	543	15; 24; 34; 35
	63	552	15; 24; 25; 35				

Серед усіх $5^{5-2} = 125$ дерев, які можна побудувати на $n = 5$ вершинах, 5 мають діаметр $d = 2$, 60 — діаметр $d = 3$, та 60 — діаметр $d = 4$. Відповідно, якщо перебирати лише дерева з діаметрами 2 та 3 (як рекомендується, наприклад, у [17]), то обчислювальна складність комбінаторного перебору зменшиться майже вдвічі. Для випадку $n = 6$ вершин загальна кількість дерев дорівнює $6^{6-2} = 1296$. При цьому діаметр $d = 2$ мають 6 із них, діаметр $d = 3$ — 210 дерев, діаметр $d = 4$ — 720, а діаметр $d = 5$ — 360 дерев. Відповідно, якщо обмежитися лише перебором дерев з діаметром не більше 3 ($d \leq 3$), то складність комбінаторного перебору знизиться у 6 разів. Для більшої кількості вершин різниця у потужності перебору буде ще суттєвішою.

Висновки

Показано, що діаметр покривних дерев впливає на стійкість результатів експертиз до помилок, які допускаються експертами під час порівняння альтернатив. Запропоновано метод сортування покривних дерев за діаметром, який базується на врахуванні частоти повторення номерів вершин графа дерева у відповідному коді Прюфера. Метод дозволяє за необхідності, суттєво знизити трудомісткість процедур агрегації експертних оцінок, особливо за великої кількості альтернатив, що порівнюються між собою. Отримано кількісні результати, які підтверджують ефективність запропонованого методу. Запропонований у статті підхід до сортування покривних дерев дозволяє удосконалити комбінаторний метод агрегації експертних оцінок і знизити його трудомісткість без суттєвих втрат інформації. Подальші дослідження будуть спрямовані, зокрема, на експериментальне підтвердження переваги удосконаленого методу над наявними реалізаціями за стійкістю до помилок експертів.

1. Cayley, A. (1889). A theorem on trees. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 23, 376-378.
2. Chaiken, S., & Kleitman, D. (1978). Matrix Tree Theorems. *Journal of Combinatorial Theory*, Series A, 24 (3): 377–381. doi:10.1016/0097-3165(78)90067-5

3. Bozóki, S., & Tsyganok, V. (2019). The (logarithmic) least squares optimality of the arithmetic (geometric) mean of weight vectors calculated from all spanning trees for incomplete additive (multiplicative) pairwise comparison matrices. *International Journal of General Systems*, 48(4), 362-381. http://dx.doi.org/10.1080/03081079.2019.1585432.

4. Ніколаєва, К., Койбічук, В. Дискретний аналіз. Графи та їх застосування в економіці: навч. посіб. Суми: УАБС НБУ, 2007.

5. Тоценко, В. Методи та системи підтримки прийняття рішень. Київ: Наук.думка, 2002.

6. Циганок В. Комбінаторний алгоритм парних порівнянь зі зворотним зв'язком з експертом. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2000. Т. 2, № 2. С. 92–102.

7. Tsyganok, V. (2010). Investigation of the aggregation effectiveness of expert estimates obtained by the pairwise comparison method. Mathematical and Computer Modelling, 52(3-4), 538-544. http://dx.doi.org/10.1016/j.mcm.2010.03.052.

8. Kadenko, S., Tsyganok, V., Szádoczki, Z., & Bozóki, S. (2021). An update on combinatorial method for aggregation of expert judgments in AHP. Production, 31,1–17. https://doi.org/10.1590/0103-6513.20210045

9. Prüfer, H. (1918). Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen. Archiv der Mathematik und Physik, 27, 742-744.

10. Deo, N. & Micikevicius, Paulius. (2001). Prüfer-like codes for labeled trees. Congressus Numerantium. 151, 65-73.

11. Raidl, G., Gottlieb, J., Ag, S., Julstrom, B., Raidl, G., & Rothlauf, F. (2001). Prüfer Numbers: A Poor Representation of Spanning Trees for Evolutionary Search. GECCO'01: Proceedings of the 3rd Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation, 343 – 350.

12. Wang, X , Wang, L. and Wu, Y. (2009) An Optimal Algorithm for Prufer Codes. *Journal of Software Engineering and Applications*, **2**, 111-115. doi: 10.4236/jsea.2009.22016.

13. Siraj, S., Mikhailov, L., & Keane, J. (2012). Enumerating all spanning trees for pairwise comparisons. *Computers & Operations Research*, 39(2), 191-199. http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2011.03.010.

14. Siraj, S., Mikhailov, L., & Keane, J. (2012). Corrigendum to "Enumerating all spanning trees for pairwise comparisons". [Computers & Operations Research, 39(2), 191-199.]. *Computers & Operations Research*, 39(9), 2265. https://doi.org/10.1016/j.cor.2011.11.010.

15. Lundy, M., Siraj, S., & Greco, S. (2017). The mathematical equivalence of the «spanning tree» and row geometric mean preference vectors and its implications for preference analysis. *European Journal of Operational Research*, 257(1), 197–208. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.07.042.

16. Циганок В.В. Метод обчислення ваг альтернатив на основі результатів парних порівнянь, проведених групою експертів. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2008. Т. 10, № 2. С. 121–127.

17. Циганок В.В. Елементи комбінаторного підходу при визначенні спектрального коефіцієнта узгодженості експертних парних порівнянь. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2012.Т. 14, № 2. С. 98–105.

18. Циганок В.В., Роїк П.Д. (2018). Метод визначення та підвищення узгодженості експертних оцінок при підтримці прийняття групових рішень. *Системні дослідження та інформаційні технології*. №3. – С.110-121. https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2018.3.10.

19. Szádoczki, Z., Bozóki, S., & Tekile, H. (2022). Filling in pattern designs for incomplete pairwise comparison matrices: (quasi-)regular graphs with minimal diameter. *Omega*, 107, 102557. https://doi.org/10.1016/j.omega.2021.102557.

20. Szádoczki, Z., Bozóki, S., Juhász, P., Kadenko, S. V., & Tsyganok, V. (2023). Incomplete pairwise comparison matrices based on graphs with aver age degree approximately 3. *Annals of Operations Research*, 326, 783 807. https://doi.org/10.1007/s10479-022-04819-9.

Надійшла до редакції 20.01.2026