

УДК 303.732:519.237

І. О. Квашук^{1,2}, Н. В. Кузнецова¹

¹Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Проспект Берестейський, 37, к. 35, 03056 Київ, Україна

²Київська школа економіки

вул. Миколи Шпака, 3, 03113 Київ, Україна

e-mail: illiakvashuk@gmail.com, natalia-kpi@ukr.net

Аналіз чутливості параметрів моделей копул при оцінюванні ризиків зелених проєктів

Розглянуто питання стабільності оцінок параметрів для різних типів моделей класу архімедових копул. Використовуючи методи максимальної правдоподібності (ММП) та метод моментів (ММ) для оцінювання параметрів копул, проведено порівняння чутливості параметрів до змін у вхідних даних. На основі набору даних, що містить інформацію щодо компаній в розрізі економічних та екологічних показників, було змодельовано методом бутстреп-аналізу 10 000 потенційних вибірок і проаналізовано 3 пари факторів з метою відстеження поведінки параметрів. За результатами експерименту отримано довірчі інтервали для оцінок параметрів і проведено порівняння їхньої ширини для методів максимальної правдоподібності та моментів.

Ключові слова: копули, математичні моделі, чутливість параметрів, ризики, зелені проєкти, довірчі інтервали, метод максимальної правдоподібності.

Вступ

Сьогодні у світі формується парадигма, що сталий розвиток кожної країни та світу в цілому, суттєво залежить від того, як швидко людство відреагує на сукупність глобальних викликів і екологічних змін природи, та які засоби протидії будуть застосовані. Виробництво має бути не лише ефективним, але й екологічно чистим. Компанії, оптимізуючи виробничі процеси та потужності, впроваджуючи робототехніку та когнітивні технології і прискорюючи виробничі цикли, підвищують ефективність бізнесу. Імплементация практик циркулярної економіки, які мінімізують викиди і оптимізують використання ресурсів, є однією з найцінніших навичок у професіоналів майбутнього. Такі зміни в технологіях і розробках вимагають комплексного підходу, який передбачає формування та розроблення превентивних

© І. О. Квашук, Н. В. Кузнецова

і довгострокових заходів, спрямованих на запобігання негативним і загрозовим тенденціям на довгострокову перспективу. Сьогодні проєкти, які спрямовані на довгострокову зміну та впровадження ефективних екологічних рішень разом з розвитком компаній, називають «зеленими проєктами».

Зелені проєкти існують на перетині двох сфер — екології і фінансів, спрямовані на довгострокові впровадження сучасних рішень, технологій для збереження природних ресурсів, зменшення забруднень і викидів, покращення умов і зменшення кліматичних загроз. Для оцінювання ефективності зелених проєктів доцільно створити моделі, що допомагають краще враховувати аномальні події і «крайні значення» (емерджентні) на краях розподілів тенденції, зокрема на основі копул, що дозволяють враховувати залежності між різними факторами. Разом з тим, застосування моделей на основі копул вимагає вирішення ряду питань, серед яких, зокрема, є питання «чутливості» оцінок параметрів. Під чутливістю тут розуміють наступне: якщо деякі спостереження мали б інші значення, то наскільки відрізнялося би значення параметра? Таким чином, ми досліджуємо, як зміни у вхідних параметрах впливають на значення досліджуваного показника та які наслідки це може мати для фінансових можливостей компанії. За умови обмежених фінансових ресурсів це дозволяє моделювати різні екологічні стратегії компаній, встановлюючи різні рівні екологічності «зелених» проєктів.

Формальне визначення моделей копул розглядалося в роботі, присвяченій аналізу алгоритмів [1]. Чутливість — це властивість математичного методу або алгоритму за невеликих змін у вхідних даних призводити до пропорційно невеликих змін у розв'язку або оцінених параметрах. Цю чутливість кількісно описують через число обумовленості (condition number). Мале число обумовленості означає, що проблема добре обумовлена (well-conditioned), а отже, результат стійкий до помірних збурень вхідних даних. Для роботи з реальними даними найкраще підходять саме добре обумовлені алгоритми.

Визначення сили залежності між факторами є ключовим етапом у побудові ефективної роботи моделі. Якщо значення параметрів моделі не можна ідентифікувати з належною точністю, то використання моделі в подальшому не буде ані надійним, ані оптимальним через слабкість моделі по відношенню до викидів (outliers) [2]. У прикладній статистиці та науці про дані вже добре сформовані підходи до перевірки коефіцієнтів на значущість — лінійної регресії, параметрів часових рядів, моделей та отримання їхніх меж, використовуючи довірчі інтервали з фіксованим рівнем помилки.

З урахуванням усе більшої сфери та глибини застосування копульних моделей, постає питання у визначенні того, наскільки стійкими є підходи, та яка різниця для результатів оцінювання, отриманих різними моделями.

Постановка задачі

З огляду на специфіку сфери зелених проєктів, що характеризується обмеженим обсягом доступних і структурованих даних, виникає необхідність у формалізації підходів до моделювання ризиків в умовах малих вибірок. На відміну від галузей із розвиненою системою збору інформації (зокрема цифрових платформ, де накопичуються значні масиви даних щодо поведінки користувачів, транзакцій і

взаємодії з сервісами), у зеленій сфері процеси збору, стандартизації і моніторингу даних перебувають на початковому етапі розвитку.

Інформація щодо реалізації зелених проектів, притаманних їм ризиків, а також факторів і змінних, що їх описують, має фрагментарний характер і розглядається як система випадкових величин з різною природою розподілів. Додатковою проблемою є неоднорідність методологій формування показників та обмежена доступність фінансових даних, тоді як екологічні параметри часто не мають чіткої формалізованої структури, придатної для кількісного аналізу.

У зв'язку з цим виникає задача дослідити поведінку та чутливість оцінок параметрів математичних моделей в умовах невеликих вибірок. Необхідно здійснити аналіз впливу варіативності наборів даних на значення оцінок коефіцієнтів моделей, а також порівняти підходи до їхнього оцінювання з точки зору стабільності, зміщеності та інформативності результатів.

Очікуваним результатом є визначення меж застосування відповідних методів оцінювання та формування рекомендацій щодо побудови моделей ризиків для зелених проектів за умов обмеженої емпіричної бази.

Огляд літератури

Оцінювання стійкості алгоритмів є об'єктом численних досліджень, результати яких можуть бути використані і адаптовані для аналізу параметрів копул. Оскільки копули за своєю природою є статистичними моделями, для них розроблено широкий спектр підходів і методів, які можна застосовувати з мінімальною специфікацією.

Робота [3] становить інтерес як концептуально близька до поставленої задачі у нашій роботі. Завдяки застосуванню методів бутстреп-аналізу та двоетапного методу максимальної правдоподібності, ця робота створює надійне підґрунтя для моделювання за допомогою копул. Водночас отримані в ній результати стосуються часових рядів (моделей іншого типу), що унеможлиблює пряме застосування запропонованого алгоритму для нашої задачі.

Дослідження [4] присвячене модифікації методу псевдомаксимальної правдоподібності для оцінювання параметрів копул за наявності скошених та асиметричних даних. Отримані результати підтверджують, що класичні процедури оцінювання є чутливими до специфіки розподілів. Отже, вибір методу оцінювання безпосередньо визначає стабільність параметрів, які можуть виявляти нестійкість навіть за незначних збурень.

У роботі [5] розглянуто баєсівський підхід, що підкреслює важливість урахування невизначеності параметрів під час моделювання екстремальних подій. Застосування баєсівських процедур дає змогу підвищити описову здатність моделей щодо хвостових залежностей і сформулювати інтервальні оцінки, які краще інтерпретуються в задачах ризик-менеджменту. Логічним продовженням цього напрямку є праця [6], у якій запропоновано інструментарій для багатовимірного аналізу розподілів на основі копул.

Проблему вибору адекватної структури математичних моделей копул та побудови багатовимірних залежностей детально досліджено у працях [7, 8]. Автори обґрунтовують концептуальний підхід до визначення оптимальної архітектури мо-

делі та наводять низку практичних прикладів. Зокрема, продемонстровано, що використання *vine*-копул дає змогу моделювати складні ієрархічні структури залежностей, що характерні для фінансових та енергетичних ринків. Додатково в роботі [9] здійснено огляд сучасних напрямів розвитку копульного моделювання, що охоплює порівняльний аналіз методів максимальної правдоподібності, інференцію функцій залежності та критерії вибору сімейства копул.

Практичне застосування копул для моделювання ризиків фінансової природи розглянуто в дослідженні [10], де проаналізовано залежність збитків від кіберризиків з урахуванням поведінки «хвостів» розподілу. Автори демонструють, що традиційні кореляційні підходи не здатні адекватно відобразити екстремальну взаємозалежність, тоді як копульні моделі забезпечують більш реалістичну оцінку сукупного ризику.

У контексті зелених і кліматичних ризиків значний інтерес становлять роботи [11–14]. Зокрема, в роботі [11] запропоновано копульний підхід до оцінювання кліматичних ризиків під час ціноутворення погодних деривативів, що дозволяє враховувати складну нелінійну залежність між метеорологічними та фінансовими змінними. Дослідження [12] присвячене аналізу хвостової залежності між ESG-показниками та фінансовими ризиками, що підкреслює важливість моделювання сумісних коливань (співрухів) у періоди криз. У роботі [13] інтегровано *vine*-копули з моделями GARCH для оцінювання показника Value-at-Risk з урахуванням ESG-факторів.

Подальший розвиток цієї тематики відображено в працях [14, 15], де досліджується екстремальна залежність між «зеленими» облігаціями та традиційними фінансовими ринками. Отримані результати підтверджують наявність асиметричної хвостової залежності, яка підсилюється в періоди ринкових шоків, що обґрунтовує необхідність використання гнучких копульних конструкцій при оцінюванні зелених ризиків.

Отже, аналіз сучасних публікацій свідчить про активне використання копульних моделей для дослідження залежностей у структурі фінансових і кліматичних ризиків. Водночас питання чутливості параметрів копул, їхньої стійкості до варіацій вибірки та порівняння методів оцінювання в умовах обмеженого обсягу даних залишаються недостатньо систематизованими. Це обґрунтовує актуальність подальшого аналізу чутливості параметрів копульних моделей при побудові моделей зелених ризиків.

Теоретичні відомості

Формальне визначення з теорії копул детально наведено у роботах [16, 17], а загальна інтерпретація моделі копул може бути наступна.

Копули — це функції, що зв'язують одномірні рівномірні розподіли на інтервалі від 0 до 1 (отримані за допомогою функцій розподілу) в єдиний багатовимірний розподіл, відтворюючи залежність і зберігаючи маржинальний розподіл окремих змінних.

Основною ідеєю копул як моделей, є те, що: якщо існує спільна функція розподілу, то вона може бути отримана за рахунок маржинальних розподілів і функції зв'язку. Даний результат, отриманий Абе Скларом ті представлений у теоремі Склара, підтверджує можливість побудови такого представлення [16].

Розроблені такі сімейства копул, як еліптичні, архімедові, спеціальні сімейства для поєднання вже існуючих копул (копули типу Vine), які використовуються залежно від типу задачі. У нашій попередній роботі [18] було отримано оцінки параметрів копул для архімедового класу моделей. Дана робота присвячена розробці класу сімейств копул — Франка, Гумбельта та Клейтона.

Копула Клейтона представляється у вигляді функції:

$$C_{\theta}(u, v) = \max \left\{ (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}, 0 \right\}, \theta \geq 0,$$

яка має параметр θ , і позначення $\theta \rightarrow 0$ означає, що залежність між змінними зникає.

Копула Гумбеля є функцією:

$$C_{\theta}(u, v) = \exp \left(-[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}} \right), \theta \geq 1.$$

І для $\theta = 1$ — змінні стають незалежними.

Копула Франка (у двовимірному випадку):

$$C_{\theta}(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right), \theta \in R \setminus \{0\}.$$

Методи оцінювання параметрів копул

Існує кілька методів оцінювання параметрів копул, кожному з яких властиві певні переваги та недоліки. Найбільш широко вживаними є метод моментів і метод максимальної правдоподібності [17]. У вказаній роботі саме ці два методи будуть використані для визначення параметрів копул і їхнього подальшого порівняння.

Метод максимальної правдоподібності (ММП) базується на використанні теоретичної моделі розподілу даних і підборі таких параметрів, за яких спостережувані дані є найбільш імовірними в межах цієї моделі. Для копул це передбачає попереднє визначення сімейства (Clayton, Gumbel, Frank тощо) та розрахунок параметра (або вектора параметрів) θ , що проводить пошук параметрів, за яких отриманий результат найбільш імовірний. У практичних задачах оцінювання параметрів копули часто виконують у ранговій постановці (pseudo-likelihood): маржинальні значення прибираються через рангове перетворення, що призводить до рівномірного розподілу, а оптимізація ведеться лише за параметрами залежності θ .

Концептуально ММП у межах копульного моделювання реалізується за наступною тезою: «після вибору конкретного сімейства копул визначається значення параметра θ , що забезпечує найкраще пояснення структури сумісної залежності в даних».

Типовий алгоритм реалізації методу максимальної правдоподібності передбачає наступну послідовність кроків.

1. Перетворення даних у псевдоспостереження.

Спостереження типу $(Y_i)_{i=1}^n$ перетворюються у $(U_i, V_i) \in (0, 1)^2$ через ранги:

$$U_i = \frac{R_i}{n+1}, V_i = \frac{S_i}{n+1},$$

де R_i, S_i — ранги X_i, Y_i . Це дозволяє працювати з копулою незалежно від конкретних маржинальних розподілів.

2. Для обраного сімейства копули $C(u, v; \theta)$ визначається щільність копули:

$$c(u, v; \theta) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v; \theta).$$

3. Тоді (псевдо-) лог-правдоподібність для параметра θ на псевдоспостереженнях дорівнює:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log c(U_i, V_i; \theta).$$

Саме ця функція є об'єктом оптимізації.

4. ММП-оцінка параметра $\hat{\theta}_{MLE}$. Оцінка максимальної правдоподібності визначається як максимум лог-правдоподібності:

$$\hat{\theta}_{MLE} = \arg \max_{\theta \in \Theta} l(\theta),$$

де Θ — допустима область параметрів (наприклад, для Гумбеля $\theta \geq 1$; для Клейтона в позитивній постановці $\theta > 0$; для Франка $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ у стандартній параметризації).

Метод моментів використовує теоретичні відомості щодо залежності параметрів копул від рангових статистик — насамперед τ Кендела. Функціональна залежність між статистиками та параметрами відома не для всіх сімейств копул, проте для низки розповсюджених класів (зокрема архімедових) вона задана в явному аналітичному вигляді або через рівняння, яка можна розв'язати чисельними методами. Концептуально, за умови вибору певного сімейства копул структура залежності між змінними описується однопараметричною (або малопараметричною) функцією. Відповідно, параметр (або вектор параметрів) цієї функції може бути відновлений на основі емпіричної рангової міри залежності.

За методом моментів (МоМ — Method of Moments) обирається певний «момент» (у широкому розумінні — статистика залежності), для якого відома теоретична залежність від параметра θ . Отриманий вираз прирівнюється до емпіричного значення. У копульному моделюванні найдоцільніше використовувати рангові міри залежності, оскільки вони інваріантні до монотонних перетворень маржинальних розподілів; ключовим показником при цьому є τ Кендела.

Модель копули Клейтона (Clayton) описується наступною функціональною залежністю параметра θ та τ Кендела:

$$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2}.$$

На основі емпіричного значення $\hat{\tau}$ параметр знаходиться як:

$$\theta = \frac{2\hat{\tau}}{1 - \hat{\tau}}.$$

Модель копули Гумбель (Gumbel):

$$\tau = 1 - \frac{1}{\theta}.$$

На основі емпіричного значення $\hat{\tau}$ параметр знаходиться як:

$$\theta = \frac{1}{1 - \hat{\tau}}.$$

Модель копули Франка (Frank).

Теоретична залежність параметра:

$$\tau = 1 - \frac{4}{\theta} + \frac{4}{\theta} D_1(\theta), \quad D_1(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{t}{e^t - 1} dt.$$

На основі емпіричного значення $\hat{\tau}$ параметр знаходиться чисельно як корінь рівняння:

$$1 - \frac{4}{\theta} + \frac{4}{\theta^2} \int_0^\theta \frac{t}{e^t - 1} dt - \hat{\tau} = 0.$$

Для генерації вибірок на основі спостережуваних даних доцільно використовувати метод **бутстрепа**. Його основна ідея полягає у формуванні нових вибірок шляхом багаторазового випадкового вибору елементів із поверненням з наявної сукупності. Теоретично доведено, що за великого обсягу вхідної вибірки поведінка змодельованого розподілу збігається з дійсним. Основним недоліком алгоритму є висока обчислювальна складність для масивів великої розмірності, проте для вибірок середнього розміру цей метод є оптимальним».

Математичне моделювання на основі реальних даних

Першим і основним кроком для проведення експерименту є вибір відповідного набору даних. З урахуванням складності збору даних, що описують зелені проекти, було прийнято рішення звернутися до вже існуючого набору даних [19], що комбінує економічні і екологічні дані, та дослідити розподіл параметрів копул.

Використаний набір даних містить інформацію щодо понад 800 компаній за фінансовими й екологічними показниками. Для дослідження обрано низку взаємозалежних параметрів, оцінених у попередній роботі [18]. Для аналізу придатні близько 570 записів, що є типовим прикладом датасету з відносно малим обсягом спостережень. Зменшення кількості доступних даних пояснюється складністю отримання одночасних спостережень у двох вимірах — економічному і екологічному.

Практичне моделювання параметрів копул має низку особливостей, зумовлених наявністю додаткових методів і підходів, які не розглядаються в межах цієї роботи (наприклад, двоетапна ідентифікація параметрів або квазіметод максимальної правдоподібності). Детальний опис цих методів наведено в праці [20]. У цьому дослідженні моделювання здійснювалося за таким алгоритмом бутстреп-аналізу [21]:

1) на першому кроці генеруються 10 000 вибірок шляхом заміщення з існуючих 570 спостережень;

2) наступний крок — це розрахунок параметрів копули для отриманої вибірки. На основі цього розподілу будувалася гістограма та порівнювалися значення параметра, отримані двома способами.

Експеримент проводився на парях параметрів, для яких обидва методи були придатними. Це зумовлено тим, що оцінка, отримана методом максимальної правдоподібності, може не збігатися для певних типів залежностей, якщо вони є строго асиметричними (із ліво- або правосторонньою хвостовою залежністю).

Розглянуті пари змінних включають характеристики ReturnOnEquity & DebtEquityRatio — рентабельність власного капіталу та співвідношення боргу до власного капіталу як індикатори прибутковості та фінансового ризику; DebtEquity

Ratio & Biodiversity — боргове навантаження підприємства та показники біорізноманіття як поєднання фінансової структури й екологічного впливу; ReturnOnEquity & TotalEnvironmentalIntensity — дохідність для акціонерів та рівень загальної екологічної інтенсивності діяльності.

Важливою особливістю проведених розрахунків є врахування області визначення параметрів. Параметри копул визначені на певних інтервалах, тому під час моделювання необхідно дотримуватися відповідних обмежень (наприклад, нерівність нулю або невід’ємність). Результати моделювання оцінок параметрів для різних сімейств копул наведено на рис. 1–3 та в табл. 1.

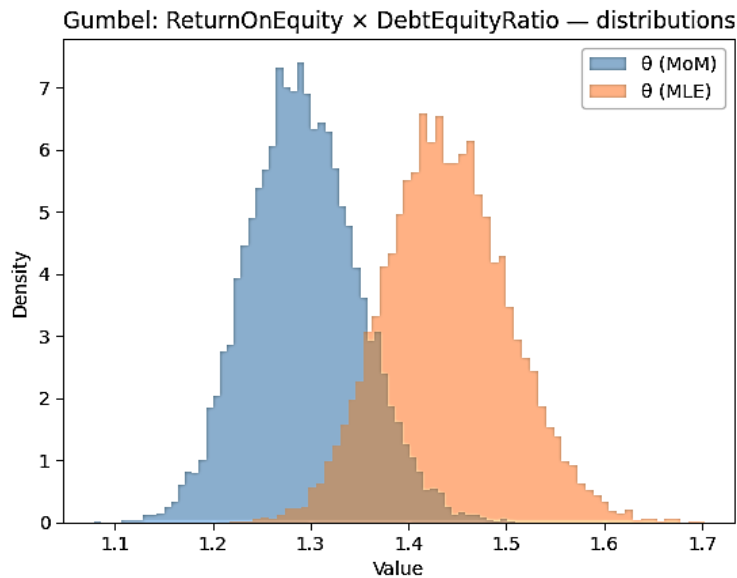


Рис. 1. Моделювання оцінок параметрів для змінних Return on Equity та Debt-to-Equity Ratio

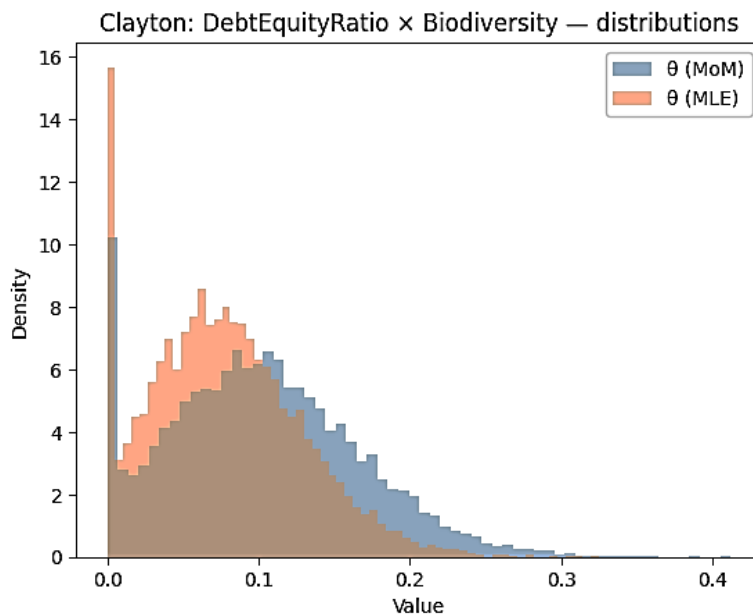


Рис. 2. Копула Клейтона для змінних Debt-to-Equity Ratio та Biodiversity

Frank: ReturnOnEquity x TotalEnvironmentalIntensity[%] — distributions

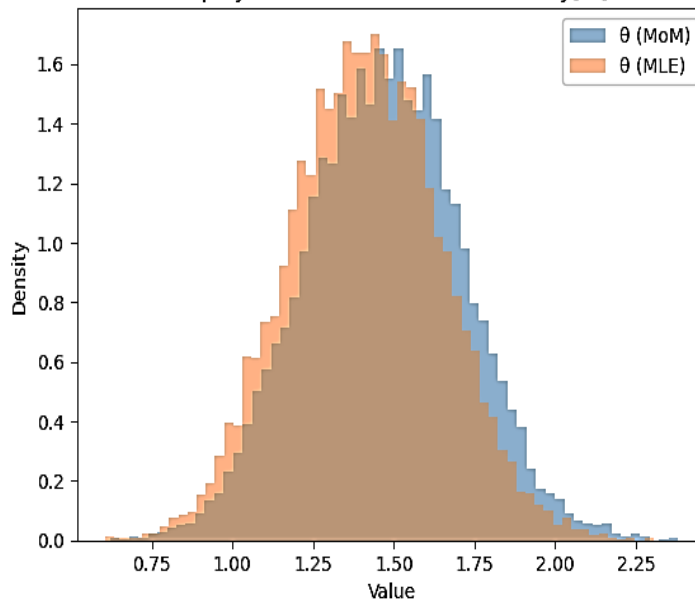


Рис. 3. Копула Франка для змінних Return on Equity та Total Environmental Intensity

Таблиця 1. Результати моделювання параметрів

Змінні	Модель (копула)	Середнє θ (МоМ)	Середнє θ (MLE)
Return on Equity & Debt-to-Equity Ratio	Gumbel	1.2925	1.4398
Debt-to-Equity Ratio & Biodiversity	Clayton	0.1023	0.0774
Return on Equity & Total Environmental Intensity	Frank	1.4701	1.4123

Фактично досягнуто збіжності оцінок параметрів до спільного центру розподілу — значення, яке зі зростанням обсягу вибірки прямує до єдиного істинного показника. Особливістю отриманих результатів є те, що у випадках, коли оцінки параметрів не перебувають на межі області визначення, їхній розподіл є симетричним і наближається до нормального.

Розподіли для різних моделей демонструють високий ступінь накладання та подібності, виявляючи симетричне відхилення від середнього значення. Отже, обидва методи є ефективними для отримання точкових оцінок і можуть використовуватися під час формування ризик-метрик. Проте за критерієм обчислювальності складності алгоритмів метод моментів виявився більш простим і продуктивним. Ця перевага може бути вирішальною під час роботи з великими масивами даних.

Більш детальний опис поведінки параметрів надають розміри довірчого інтервалу та варіація, що наведені в табл. 2.

Таблиця 2. Результати моделювання розмірів інтервалів і варіації

Змінні	Модель (копула)	θ (MoM) 95 % CI	θ (MoM) Варіація	θ (MLE) 95 % CI	θ (MLE) Варіація	CI width ratio (MoM /MLE)
Return on Equity & Debt-to-Equity Ratio	Gumbel	[1.1879, 1.4064]	0.003157	[1.3209, 1.5692]	0.004031	0.880000
Debt-to-Equity Ratio & Biodiversity	Clayton	[0.0000, 0.2348]	0.003956	[0.0000, 0.1852]	0.002510	1.267500
Return on Equity & Total Environmental Intensity	Frank	[1.0022, 1.9447]	0.059075	[0.9598, 1.8690]	0.055445	1.036600

Аналіз різних підходів до оцінювання параметрів моделей не виявив стійкої закономірності щодо ширини довірчих інтервалів залежно від обраного методу розрахунку Теоретично, під час використання методу моментів застосовуються більш строгі статистичні умови, що мало би забезпечувати перевагу в точності та, відповідно, меншу ширину інтервалу.

Хоча метод максимальної правдоподібності продемонстрував дещо кращі результати, виявлена різниця не є статистично значущою. Аналогічна тенденція спостерігається і під час оцінки варіації за обома методами. Фактично, обидва підходи демонструють подібну поведінку без суттєвих розбіжностей, що пояснюється параметричною природою моделей та ідентичністю припущень, покладених в основу процедури оцінювання параметрів.

Висновки

Проведене дослідження підтвердило, що параметри копульних моделей можуть бути надійно оцінені та перевірені на стійкість за допомогою бутстреп-підходу. З огляду на специфіку зелених проєктів, де коректність висновків щодо доцільності впровадження і оцінювання їхньої ефективності часто залежить від стійкості показників залежності, така перевірка є критично важливою перед практичним застосуванням моделей. Отримані результати засвідчили стабільне концентрування оцінок навколо центральних значень як для методу максимальної правдоподібності, так і для методу моментів, що вказує на високу відтворюваність результатів навіть за умови варіативності вибірки.

Для копул Франка та Клейтона спостерігалось практично повне узгодження параметричних оцінок, отриманих обома методами, що свідчить про їхню емпіричну надійність у межах досліджуваних даних. Натомість для копули Гумбеля виявлено відмінності між оцінками, що може бути пов'язано з її підвищеною чутливістю до структури хвостової залежності та наявності екстремальних спостережень. Це вказує на необхідність додаткової діагностики при застосуванні моделей із вираженою асиметричною хвостовою залежністю.

Отримані результати свідчать про наявність статистично значущої і структурно стійкої залежності між екологічними та фінансовими показниками, встановленої за допомогою копульного моделювання. Стабільність параметрів за різних варіантів вибірки дозволяє очікувати узгодженості відповідних ризик-метрик у практичному застосуванні.

Отримані висновки підтверджують доцільність урахування екологічної складової у процесах модернізації виробництва та обґрунтовують необхідність подальшого розвитку спеціалізованих ризик-метрик, здатних адекватно відображати складні нелінійні та хвостові залежності між зеленими та фінансовими показниками.

1. Higham N.J. Accuracy and stability of numerical algorithms. 2nd ed. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. 680 p. DOI: 10.1137/1.9780898718027.
2. Robust statistics: the approach based on influence functions / F.R. Hampel, E.M. Ronchetti, P.J. Rousseeuw, W.A. Stahel. New York: John Wiley & Sons, 2005. 502 p. DOI: 10.1002/9781118186435.
3. Bootstrapping two-stage quasi-maximum likelihood estimators of time series models / S. Gonçalves, U. Hounyo, A. Patton, K. Sheppard. Journal of Business & Economic Statistics. 2023. Vol. 41, no. 3. P. 683–694. DOI: 10.1080/07350015.2022.2058949.
4. Joo K., Shin J.-Y., Heo J.-H. Modified maximum pseudo likelihood method of copula parameter estimation for skewed hydrometeorological data. Water. 2020. Vol. 12, no. 4. Article 1182. DOI: 10.3390/w12041182.
5. Copula models for frequency analysis: what can be learned from a Bayesian perspective? / E. Parent, A.-C. Favre, J. Bernier, L. Perreault. Advances in Water Resources. 2014. Vol. 63. P. 91–103. DOI: 10.1016/j.advwatres.2013.10.013.
6. Sadegh M., Ragno E., AghaKouchak A. Multivariate copula analysis toolbox (MvCAT): describing dependence and underlying uncertainty using a Bayesian framework. Water Resources Research. 2017. Vol. 53, no. 6. P. 5166–5183. DOI: 10.1002/2016WR020242.
7. Bedford T., Daneshkhah A., Wilson K. J. Approximate uncertainty modeling in risk analysis with vine copulas. Risk Analysis. 2016. Vol. 36, no. 4. P. 792–815. DOI: 10.1111/risa.12471.
8. Model selection for discrete regular vine copulas / A. Panagiotelis, C. Czado, H. Joe, J. Stöber. Computational Statistics & Data Analysis. 2017. Vol. 106. P. 138–152. DOI: 10.1016/j.csda.2016.09.007.
9. Aas K. Pair-copula constructions for financial applications: a review. Econometrics. 2016. Vol. 4, no. 4. Article 43. DOI: 10.3390/econometrics4040043.
10. Eling M., Jung K. Copula approaches for modeling cross-sectional dependence of data breach losses. Insurance: Mathematics and Economics. 2018. Vol. 82. P. 167–180. DOI: 10.1016/j.insmatheco.2018.07.003.
11. Bressan G. M., Romagnoli S. Climate risks and weather derivatives: a copula-based pricing model. Journal of Financial Stability. 2021. Vol. 54. Article 100877. DOI: 10.1016/j.jfs.2021.100877.
12. ESG, risk, and (tail) dependence / K. Bax, Ö. Şahin, C. Czado, S. Paterlini. International Review of Financial Analysis. 2023. Vol. 87. Article 102513. DOI: 10.1016/j.irfa.2023.102513.
13. Demartis S., Rogo B. The relationship between ESG scores and Value-at-Risk: a vine copula-GARCH based approach. Journal of Risk and Financial Management. 2024. Vol. 17, no. 11. Article 517. DOI: 10.3390/jrfm17110517.
14. Extreme risk dependence between green bonds and financial markets / S. Karim, B. M. Lucey, M. A. Naeem, L. Yarovaya. European Financial Management. 2024. Vol. 30, no. 2. P. 935–960. DOI: 10.1111/eufm.12458.
15. Zheng H., Wang S., Zhang T. Dynamic risk spillovers between green bonds and energy markets: new evidence from the GARCH-MIDAS-D-Copula-CoVaR approach considering uncertainties. Renewable Energy. 2025. Vol. 239. Article 122129. DOI: 10.1016/j.renene.2024.122129.
16. Nelsen R. B. An introduction to copulas. 2nd ed. New York, NY: Springer, 2006. 272 p. DOI: 10.1007/0-387-28678-0.

17. McNeil A. J., Frey R., Embrechts P. Quantitative risk management: concepts, techniques and tools. 2nd ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2015. 720 p.

18. Кузнецова Н. В., Квашук І. О. Математичні моделі копул для оцінювання ризиків «зелених проєктів». *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2025. Т. 27, № 1. С. 15–27. DOI: 10.35681/1560-9189.2025.27.1.335614.

19. Кузнецова Н. В., Шевчук О. С. Моделі оцінки ризиків зелених проєктів. *Реєстрація, зберігання і обробка даних*. 2024. Т. 26, № 1. С. 144–153. DOI: 10.35681/1560-9189.2024.26.1.308752.

20. Joe H. Dependence modeling with copulas. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2014. 480 p. DOI: 10.1201/b17116.

21. Genest C., Rémillard B. Validity of the parametric bootstrap for goodness-of-fit testing in semiparametric models. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*. 2008. Vol. 44, no. 6. P. 1096–1127. DOI: 10.1214/07-AHP148.

Надійшла до редакції 18.02.2026