

DOI: 10.35681/1560-9189.2025.27.1.335614

УДК 303.732

Н. В. Кузнецова, І. О. Квашук

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Проспект Берестейський, 37, 03056, Київ, Україна
e-mail: natalia-kpi@ukr.net, illiakvashuk@gmail.com

Математичні моделі копул для оцінювання ризиків «зелених проєктів»

Роботу присвячено аналізу і оцінюванню кредитних ризиків «зелених проєктів» за допомогою математичних моделей копул, що дозволяє покращити врахування залежностей між економічними і екологічними факторами. Аналіз проведено на наборі даних, що включає понад 800 спостережень, які охоплюють фінансові показники і екологічні аспекти компаній з різних секторів економіки. Особливу увагу приділено детальному аналізу екстремальних залежностей на межах розподілу, зокрема у «upper tail» та «lower tail». Дослідження охоплює різні сімейства копул, такі як Гаусова, t-копула та Архімедові копули (Gumbel, Clayton, Frank), з акцентом на тих розподілах, які демонструють кращу здатність відображати асиметричну залежність, що є характерною для екологічних ризиків. На основі отриманих результатів моделювання проведено розрахунок значення Value-at-Risk (VaR) на різних рівнях довіри, що забезпечує всебічний опис характеристик ризику. Оцінка ризику, яку отримано в результаті моделювання на основі копул, представляє собою більш узагальнену та гнучку форму оцінювання ризиків порівняно з традиційними підходами.

Ключові слова: копули, математичні моделі, оцінювання ризиків, Extreme Value Theory.

Вступ

Екологічні ризики набувають ключового значення в процесах планування та реалізації сучасних проєктів у різних секторах економіки. Їхня роль зростає в умовах глобальних кліматичних змін, обмеженості ресурсів і доступу до них, посилення регуляторних вимог і підвищеного суспільного запиту на екологічну відповідальність бізнесу. У сучасному світі актуальними є адаптація виробничих потужностей і споживчих потреб, раціональне використання наявних ресурсів і заохочення компаній і громадян до свідомого та поміркованого ведення бізнесу. Кожна організація має розробити власну модель, спрямовану на зменшення негативного

© Н. В. Кузнецова, І. О. Квашук

впливу на екосистему, яка відповідатиме принципам сталого розвитку. Імплементація таких підходів, в ідеалі, повинна бути закріплена на законодавчому рівні кожної країни, передбачаючи спеціальні стимули для бізнесу, які сприятимуть впровадженню цих змін. Для переоснащення бізнесу компаніям необхідно виділити значні фінансові ресурси, які не завжди є доступними. Тому доцільно створювати систему «зелених кредитів» для підтримки проєктів, що орієнтовані на зменшення викидів і забруднень під час виробництва, зокрема проєктів для енергетичної декарбонізації, розвитку сховищ енергії, зеленої металургії та енергоефективних технологій у промисловості. Успішність реалізації таких проєктів буде залежати від багатьох факторів і невизначеностей, які пов'язані з неповнотою даних, відсутністю чіткого механізму та карти відслідковування досягнення цілі під час реалізації такого проєкту, що в свою чергу створює різноманітні ризики, які можуть виникати внаслідок змін зовнішніх обставин і нормативно-правових актах. Зокрема, фінансові ризики можуть проявлятися у вигляді нездатності окупити інвестиції через непередбачене зростання витрат на реалізацію проєкту.

В Україні наприкінці 2024 року розпочав свою діяльність Фонд декарбонізації, який має за мету підтримку та кредитування проєктів, що спрямовані на зменшення викидів парникових газів. Завдяки механізму оцінювання кредитоспроможності та доцільності таких проєктів організації і підприємства отримують можливість реалізувати ініціативи з підвищення енергоефективності, розвитку зеленої енергетики та скорочення викидів парникових газів у навколишнє середовище. Однак інші напрямки, такі як зменшення впливу на екосистему та забруднення води, залишаються недостатньо розробленими і потребують також пріоритетизації проєктів для реалізації, які дійсно здатні зменшити екологічні ризики, і визначення факторів, що можуть впливати та визначати ефективність їхньої реалізації.

Оцінювання екологічних ризиків є надзвичайно складною задачею, що не має однозначного вирішення та вимагає врахування численних взаємопов'язаних факторів. У попередніх дослідженнях автори [1] зосередилися на визначенні доцільності врахування окремих екологічних складових діяльності компанії при оцінці їхньої фінансової успішності в рамках «зелених проєктів» і запропонували підхід до оцінювання інвестиційної привабливості таких проєктів, що включає не лише фінансові аспекти, але й екологічні метрики. Наступним етапом для подальшого дослідження автори зазначили можливість застосування і аналізу широкого спектра факторів, які оцінюють діяльність і вплив людини з різних аспектів. Важливим є врахування взаємозв'язку цих факторів, особливо в екстремальних умовах, коли традиційні лінійні моделі демонструють значні похибки в оцінках.

Класичні методи оцінювання ризиків часто припускають нормальний розподіл змінних і лінійні залежності між ними, що рідко відповідає реаліям екологічних систем, для яких характерні нелінійні взаємозв'язки та «важкі хвости» розподілів — «lower tail» та «upper tail». Докладний огляд оцінювання ризиків для «хвостів» розподілів, наведено в роботі [2].

Існує декілька можливих підходів до оцінювання ризиків: параметричний, що включає побудову моделей, і непараметричний, наприклад, історичний. Використання кожного із підходів має як позитивні, так і негативні сторони [3]. Так, непараметричний підхід дозволяє працювати з даними, не накладаючи на них жодних

обмежень, проте разом з тим він є суттєво обмеженим в умовах незначної кількості даних і може надавати невірні прогнози з часом.

У сфері «зелених проєктів» характерним є наявність значних коливань у часі, коли існуючі в історичних даних тенденції можуть бути змінені, або ж кількість даних щодо системи або проєкту, що досліджується, може бути недостатньою. Питання використання тих чи інших методів для ризиків, що пов'язані з природними факторами, наприклад, паводками, широко розглядаються в матеріалі [4].

Постановка задачі

Для визначення взаємного впливу різних факторів, які можуть мати вирішальну роль для ефективності й успішності впровадження «зелених проєктів», необхідно запропонувати новий спосіб оцінювання та врахування цього впливу. На основі реальних даних, що поєднують економічні й екологічні параметри, здійснити відбір метрик і параметрів, які мають прямий вплив на умови існування та функціонування «зелених проєктів».

Наступним кроком пропонується дослідити можливості застосування математичних моделей копул для глибшого розуміння розподілів самих даних, що характеризують певні параметри, щодо встановлення причинно-наслідкових зв'язків і формування причин для появи ризиків певної природи. Для цього слід дослідити (попарно) фактори між собою на предмет їхнього взаємного впливу, побудувавши різні моделі копул (Клейтона, Франка, Гумбеля) та оцінити їхні параметри. Доцільно сформулювати пари з факторів екологічної і фінансової складової даних, що характеризують «зелені проєкти» (green projects) і компанії. Очікуваним результатом роботи буде перевірка підходів до оцінки ймовірності настання екстремальних подій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Дослідження доцільності одночасного врахування факторів екологічної та економічної природи було здійснено у роботі авторів [1]. Було побудовано різноманітні моделі інтелектуального аналізу даних для оцінювання «зелених проєктів» із використанням фінансових і економічних метрик компаній, а також екологічних факторів, що дозволило підвищити точність прогнозування успішності проєктів, які спрямовані на зменшення «зелених ризиків». Аналіз ризиків фінансової природи найчастіше здійснюють на основі моделей для оцінки різних мір ризику, що пов'язані з «хвостами» розподілів фінансових часових рядів [2]. Методологія, яку розглянуто в роботі [2], поєднує моделі типу GARCH з теорією екстремальних значень, що дозволяє відображати як умовну гетероскедастичність у фінансових доходах, так і екстремальну поведінку «хвостів» розподілів. Таке поєднання забезпечує більш точне прогнозування показника Value-at-Risk, особливо в періоди значної ринкової волатильності.

У роботі [5] авторами було розширено систему моделювання ризиків, включивши копули для моделювання залежностей, що дозволяє нівелювати обмеження підходів, які засновано на кореляції, надаючи більш досконалий інструментарій для ризик-менеджерів. Було продемонстровано, як копули можуть ефективно відобра-

жати складні структури залежностей у багатовимірних ситуаціях, що особливо важливо при роботі з не гаусівськими типами розподілів, які є поширеними у фінансових даних.

Роботи [6, 7] присвячено аналізу можливості конструювання копул для оцінок ризиків різних факторів. Зокрема, було показано, що використання моделей копул дозволяє проводити коректне моделювання й успішно вирішувати проблему оцінки фінансових ризиків. Дослідження більш гнучкого використання моделей виживання [8] також розглядає способи трансформації існуючих моделей копул, зокрема, приклад перетворення однієї із найновіших моделей копул у модель виживання.

Застосування передових статистичних методів до високочастотних фінансових даних розглянуто в роботі [9], яка формує часові ряди парами та представляє одне із перших напрацювань у галузі копул. Це дослідження порівнює різні структури залежностей для багатовимірних високочастотних фінансових даних, підкреслюючи переваги методів на основі копул над традиційними мірами кореляції при моделюванні складної ринкової динаміки.

У матеріалі [10] наведено визначення теорії екстремальних значень як важливого інструменту управління ризиками, підкреслюючи важливість правильного моделювання екстремальних подій замість зосередження лише на «середній» поведінці. Ця перспектива стає все більш актуальною, оскільки фінансові установи та регуляторні органи визнають необхідність підготовки до малоймовірних подій з великим впливом. Публікація також розглядає різні підходи до моделювання ризиків та основні положення теорії екстремальних значень.

Геометричний підхід до сценаріїв високого ризику і екстремальних ситуацій було запропоновано у монографії [11], яка надає теоретичну основу для розуміння геометричних властивостей розподілів екстремальних значень, пропонуючи інтерпретацію математичних структур, що лежать в основі оцінювання екстремальних ризиків.

Фундаментальні концепції багатовимірної залежності та теоретичні основи для розуміння складних структур залежностей, які є вирішальними для точної оцінки ризиків у багатовимірних системах, висвітлено у книзі [12]. У фундаментальній роботі [13] детально проаналізовано особливості математичного моделювання за допомогою копул, а також висвітлено більше 100 прикладів їхнього використання, що може бути імплементовано для подальших досліджень.

Виходячи за межі лише фінансових застосувань копул, у прикладному дослідженні [14] було продемонстровано корисність моделювання на основі *vine-копул* для оцінки екологічних ризиків. Було виконано оцінювання ризику забруднення води у взаємопов'язаних річкових системах, що показує, як передові статистичні методи можуть бути застосовані до складних екологічних мереж, що дозволяє впроваджувати більш ефективні стратегії управління ризиками в екологічних контекстах.

Інтеграцію методів машинного навчання з традиційними статистичними підходами продемонстровано у дослідницькій роботі [15]. Ця робота з оцінювання умовного очікування «хвостів» показує, як обчислювальні досягнення можуть покращити можливості оцінки ризиків, особливо для складних, багатовимірних проб-

лем, що не піддаються традиційним аналітичним рішенням. Вона також представляє додатковий інтерес завдяки всебічному огляду нових мір ризику, conditional tail expectation, які мають ряд переваг порівняно з базовим підходом.

Роботу [16] присвячено теоретичному моделюванню ризиків і практичній оцінці впливу кліматичних аномалій, де акцентовано увагу на необхідності у розробці складних підходів до оцінювання ризиків глобальних кліматичних викликів.

Нарешті, підхід нечіткої синтетичної оцінки [17], представлений для «зелених проектів» Сінгапуру, демонструє застосування альтернативних методологій при роботі з невизначеними та суб'єктивними факторами ризику. Цей підхід визнає обмеження чисто кількісних методів і включає якісні оцінки у систему оцінювання ризиків.

Останні тенденції у сучасних дослідженнях підтверджують зростаючу інтеграцію машинного навчання з традиційними статистичними методами та розширення застосувань цих підходів за межами фінансів у екологічні науки та проекти сталого розвитку.

Особливості та фактори, що характеризують «зелені проекти»

Функціонування більшості «зелених проектів», тобто проектів, що спрямовані на покращення та збереження екосистеми і які надають конкретні екологічні переваги, передбачає наявність певних стабільних меж для ключових параметрів. У більшості випадків ці межі не можуть бути визначені з абсолютною точністю, проте мають певний статистичний розподіл. Наприклад, величина доходу від проекту в галузі відновлюваної енергетики може варіюватися залежно від метеорологічних умов, сезонності та ринкових факторів. Проте, якщо вона залишається в межах, що покривають операційні та капітальні витрати проекту, ситуація може розглядатись як стабільна та не потребує екстреного втручання.

Важливо зазначити, що наявність одного або кількох факторів аномально низького або високого характеру не завжди призводить до катастрофічних наслідків. Це може бути пов'язано як з початково неточною оцінкою допустимих меж для параметрів таких систем, так і з несистемною природою аномальності окремих параметрів. Хоча це може ускладнити підтримку та реалізацію проектів, однозначне рішення щодо закриття проекту на основі екстремального значення одного параметра може бути недоцільним. Наприклад, аномально низька генерація сонячної електростанції протягом одного місяця через нетипову хмарність може спричинити тимчасові фінансові труднощі, але не обов'язково ставить під загрозу життєздатність всього проекту.

Проблема стає принципово іншою, коли екстремальні значення одних факторів систематично асоціюються з аномальними значеннями інших важливих факторів. Це вказує на високу залежність, яка проявляється тільки в екстремальних умовах, що стосується аномально високих чи аномально низьких значень. У статистичних термінах це означає наявність сильної хвостової залежності, яку традиційні методи кореляційного аналізу часто не здатні виявити належним чином. Прикладом такої ситуації може служити інвестиційний портфель акцій різних індустрій. Падіння вартості однієї акції може призвести до системної проблеми на ринку, створюючи кризу. У такому випадку навіть для секторів, які не є взаємопов'язаними, виникає певна кореляція для наднизьких значень.

У контексті «зелених проєктів» особливу цінність мають дослідження внутрішніх залежностей не лише між різними показниками одного типу, а й між факторами різної природи — економічними, екологічними, соціальними, технологічними — які можуть проявляти складну динаміку в часі. Наприклад, екстремальні кліматичні явища (посуха, повені, аномальна спека) можуть не лише безпосередньо впливати на продуктивність біоенергетичних проєктів через зниження врожайності біомаси, але й викликати каскадні ефекти в економічній сфері: зростання цін на сировину, збільшення страхових виплат, зниження інвестиційної привабливості всього сектора.

Опис запропонованого підходу до оцінювання «зелених проєктів» із використанням копул

Для оцінювання ризиків «зелених проєктів» необхідним є визначення ключових показників, на основі яких буде проводитись оцінювання ризику. У контексті специфіки впровадження таких проєктів важливо враховувати ряд показників, які не є характерними для звичайних ініціатив, зокрема, показники екологічного впливу та відповідності проєктів чинному законодавству.

Варто зазначити, що отримання та розрахунок числових значень цих показників є окремою складною задачею. Існують певні підходи, які дозволяють отримувати числові значення навіть для суб'єктивно визначених параметрів. Так, у статті [14] відслідковується прогрес в оцінюванні таких показників, навіть за умов відсутності точних числових даних.

На основі отриманих показників можна використовувати різні міри ризику для оцінки ризикованості реалізації проєкта. Однією із найбільш популярних мір є міра Value-at-Risk (VaR), що використовується для оцінювання фінансової сторони проєкта:

$$VaR_{\alpha}(X) = \inf \{x \in R: P(X \leq x) \geq \alpha\},$$

де X — випадкова змінна, що представляє певний збиток; $\alpha \in (0,1)$ — довірчий рівень, наприклад 0.95 або 0.99.

При оцінюванні зелених ризиків, концепція VaR (Value-at-Risk) охоплює не лише прямі втрати, що виникають унаслідок реалізації проєкта, але й регуляторні штрафи, які можуть бути накладені за порушення погоджених умов існування та функціонування проєктів. Асоційоване значення втрат може варіюватися залежно від умов і тривалості проєктів. Проте ключовим аспектом є використання меж довірчого інтервалу або перцентиль розподілу для визначення можливих негативних значень.

Для оцінки ймовірностей екстремальних значень у наборах даних, що включають кілька факторів, можна застосувати три підходи.

Наївний підхід. Він передбачає, що аномальні значення не є взаємозалежними між собою для різних факторів. У такому випадку ймовірність отримання екстремальних значень для набору з двох метрик дорівнює добутку ймовірностей, обраних для кожного з екстремальних значень. Наприклад, 0.99 є критичним значенням, характерним для методології VaR.

Непараметричний (історичний). Полягає в оцінці спільного розподілу на основі історичних даних. За умов наявності великої кількості даних, цей метод є

потужним інструментом для отримання точної і надійної моделі. Однак, для значної кількості практичних випадків його застосування може бути обмеженим через недостатню кількість вхідних даних.

Параметричний. Цей підхід базується на припущенні, що спільний розподіл факторів можна описати за допомогою певної математичної моделі, наприклад, мультиваріативного нормального розподілу або моделі копули. Після підбору параметрів такої моделі на основі історичних даних можна розрахувати ймовірності екстремальних значень. Параметричний підхід дозволяє швидко отримати оцінки та є стійким при обмеженій кількості даних. Проте його точність значно залежить від правильності обраної моделі та її параметризації.

У практичних задачах часто виникає потреба в оцінюванні декількох факторів, що призводить до формування вектора або набору значень, які є суттєвими для розрахунку ризику. Отримані компоненти векторів можуть бути залежними один від одного, що ускладнює розрахунок такого набору. Враховуючи, що більшість «зелених ризиків» є комплексними і складаються з кількох складових, проблема оцінки ймовірностей у контексті ризиків стає ключовою.

З метою покращення розрахунків пропонується застосування різних типів копул.

Копула — це математична функція, яка описує залежність між випадковими величинами, незалежно від їхніх маргінальних розподілів. Копула з'єднує одновимірні маргінальні розподіли у багатовимірний спільний розподіл

$$C: [0,1]^n \rightarrow [0,1],$$

який є спільною функцією розподілу зі стандартними одновимірними маргінальними розподілами: для будь-яких $u_1, \dots, u_n \in [0,1]$, виконується

$$C(u_1, \dots, u_{i-1}, 1, u_{i+1}, \dots, u_n) = u_i.$$

За своєю суттю, модель копул є наближенням до функції зв'язки дійсного розподілу і співпадає з ним. Основна концепція полягає у виділенні процесу підбору залежності між факторами в окрему задачу, незалежну від процесу оцінки самих параметрів. Це дозволяє для різних наборів факторів проводити перевірки потенційних залежностей і впливів.

Для аналізу крайових значень розподілів зазвичай використовують різні класи копул, а саме *копули Клейтона* — у випадку позитивної залежності між малими значеннями розподілів, та *копули Гумбеля* — у випадку залежності між великими значеннями.

Копула Клейтона представляється у вигляді функції

$$C_\theta(u, v) = \max\{ (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}, 0 \}, \theta > 0,$$

що має параметр θ , і якщо $\theta \rightarrow 0$, це означає, що залежність між змінними падає.

Копула Гумбеля є функцією

$$C_\theta(u, v) = \exp\left(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}\right), \theta \geq 1.$$

Для випадку $\theta = 1$ — змінні стають незалежними, що говорить про те, що між змінними немає очікуваної залежності.

Копула Франка (у двовимірному випадку)

$$C_{\theta}(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right),$$

де $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

На основі описаних вище моделей, нами пропонується наступний параметричний підхід до роботи з оцінюванням ризиків на основі копул.

Формується k пар метрик або параметрів, що представляють інтерес. Кількість отриманих пар можна розрахувати за допомогою наступної формули:

$$k = \frac{N \times (N - 1)}{2},$$

де N — це кількість доступних параметрів.

Ділення на 2 виникає через симетричність аргументів розглянутих моделей $C(u, v) = C(v, u)$. В інших випадках, кількість пар, що необхідно розглянути, збільшується вдвічі.

Для кожної із моделей Клейтона, Гумбеля та Франка відбувається визначення значення параметра θ . Наступним кроком є визначення моделі з допустимим значенням параметром θ , що підтверджує взаємозалежність між парами та максимальним серед розрахованих параметрів моделей значенням Log Likelihood.

Опис даних, які використано для моделювання

Для роботи було обрано набір даних, який сформовано авторами у статті [1] на основі джерел [18] і [19]. Датасет включає в себе набір даних, які описують показники «зелених проєктів» у різних галузях економіки, та поєднує економічні та екологічні показники. В даних фігурують 846 унікальних компаній з 15 країн, розподілених за 41-ю індустрією, включаючи виробництво офісної техніки та комп'ютерів, телекомунікації, видобуток нафти, фінансове посередництво та багато інших.

Подібні набори даних формуються регуляторними органами у відповідній сфері з метою аналізу асоційованих з галузями та проєктами ризиками. Розглянутий набір даних, на нашу думку, включає типові показники для «зелених ризиків» і представляє значний практичний інтерес для подальшої інтерпретації, пошуку залежностей та аналізу.

Описаний метод було застосовано на даних з метою визначення хвостових залежностей і надання додаткової інформації щодо аномальних значень на кінцях розподілів, що є критично важливим для процесу оцінювання ризиків. Більшість зелених проєктів є стартапами зі значною волатильністю і додаткове розуміння того, які екстремальні події залежать одна від одної, дозволить краще підготувати стратегії контролю фінансових ризиків, які виникають.

Для економічних даних було обрано наступні параметри: NetProfitMargin, чиста маржа прибутку (пряме визначення прибутковості), значення якої для 90 % спостережень варіюється від 5-го перцентиля $-0,09$ % до 95-го перцентиля $0,26$ %, з медіаною $0,07$ %; ReturnOnEquity, рентабельність власного капіталу (є показником ризику акціонерів), для якого 5-й перцентиль становить $-0,24$ %, а 95-й перцентиль $0,72$ %, із медіаною $0,13$ %; DebtEquityRatio, коефіцієнт співвідношення боргу до

власного капіталу (ключовий показник ризикового навантаження), для якого 5-й перцентиль дорівнює 0, а 95-й перцентиль становить 6,43, з медіаною 1,70. Для екологічних даних подібними метриками є TotalEnvironmentalIntensity, загальна екологічна інтенсивність, що має 5-й перцентиль — 146,76 % та 95-й перцентиль — 0,24 %, при медіані –3,31%, та Biodiversity (біорізноманіття), показники якого для 5-го перцентилля становлять 797, а для 95-го перцентилля 670997, з медіаною 18222.

Було виконано нормалізацію даних для подальшого використання моделями копул. Завдяки процедурі нормалізації отримано рівномірний розподіл значення від 0 до 1 на рівні кожного параметру, що наближує емпіричну функцію розподілу. На основі них і було виконано моделювання.

Основні результати проведеного дослідження на реальних даних із використанням копул

На основі обраних параметрів було сформовано набори економічних та екологічних параметрів для дослідження хвостових залежностей. Із загальної кількості у 10 пар було відібрано 6 придатних для подальшого моделювання пар, значення параметрів яких відповідали вимогам моделей. Для кожної із цих пар визначено до трьох типів відповідних копул, серед яких за результатами моделювання було обрано оптимальну за максимальним значенням Log Likelihood. Результати відбору і тип оптимальних для відповідних пар параметрів представлено у табл. 1.

Таблиця 1. Результати моделювання із застосуванням різних типів копул для пар економічних та екологічних параметрів

Група параметрів	Тип копули	θ	Log Likelihood	AIC	BIC
TotalEnvironmentalIntensity[%] & Biodiversity	Frank	-6.49e+00	2.06e+02	-4.09e+02	-4.05e+02
ReturnOnEquity & DebtEquityRatio	Gumbel	1.29e+00	8.11e+01	-1.60e+02	-1.56e+02
ReturnOnEquity & TotalEnvironmentalIntensity[%]	Frank	1.47e+00	1.60e+01	-3.00e+01	-2.57e+01
ReturnOnEquity & Biodiversity	Frank	-6.90e-01	3.21e+00	-4.42e+00	-8.00e-02
DebtEquityRatio & Biodiversity	Clayton	9.86e-02	1.20e+00	-4.10e-01	3.94e+00
DebtEquityRatio & TotalEnvironmentalIntensity[%]	Frank	-1.82e-01	2,20e-01	1.57e+00	5.92e+00

У символічному вигляді, підставивши отриману оцінку параметру з табл. 1, було отримано формули залежностей для відповідних наборів параметрів. Для Total Environmental Intensity [%] & Biodiversity (Frank Copula, залежність має такий вигляд:

$$C(E, B) = -\frac{1}{-6.49} \left(1 + \frac{(e^{6.49E} - 1)(e^{6.49B} - 1)}{e^{6.49} - 1} \right),$$

де $E = \text{Total Environmental Intensity } [\%]$; $B = \text{Biodiversity}$.

Аналогічно, для Return on Equity & Debt-Equity Ratio (Gumbel Copula, $\theta = 1.29$):

$$C(R, D) = \exp \left(-[(-\ln R)^{1.29} + (-\ln D)^{1.29}]^{1.29} \right),$$

де R = Return on Equity; D = Debt-Equity Ratio.

Для Return on Equity & Total Environmental Intensity [%] (Frank Copula, $\theta = 1.47$), відповідно:

$$C(R, E) = -\frac{1}{1.47} \left(1 + \frac{(e^{-1.47R} - 1)(e^{-1.47E} - 1)}{e^{-1.47} - 1} \right),$$

де R = Return on Equity, E = Total Environmental Intensity [%].

Копула для Return on Equity & Biodiversity (Frank Copula, $\theta = -0.69$) має вигляд:

$$C(R, B) = -\frac{1}{-0.69} \ln \left(1 + \frac{(e^{0.69R} - 1)(e^{0.69B} - 1)}{e^{0.69} - 1} \right),$$

де R = Return on Equity; B = Biodiversity.

Debt-Equity Ratio & Biodiversity (Clayton Copula, $\theta = 9.86$):

$$C(D, B) = \max(D^{-9.86} + B^{-9.86} - 1, 0),$$

де D = Debt-Equity Ratio, B = Biodiversity.

Debt-Equity Ratio & Total Environmental Intensity [%] (Frank Copula, $\theta = -1.82$):

$$C(D, E) = -\frac{1}{-1.82} \left(\frac{(e^{1.82D} - 1)(e^{1.82E} - 1)}{e^{1.82} - 1} \right),$$

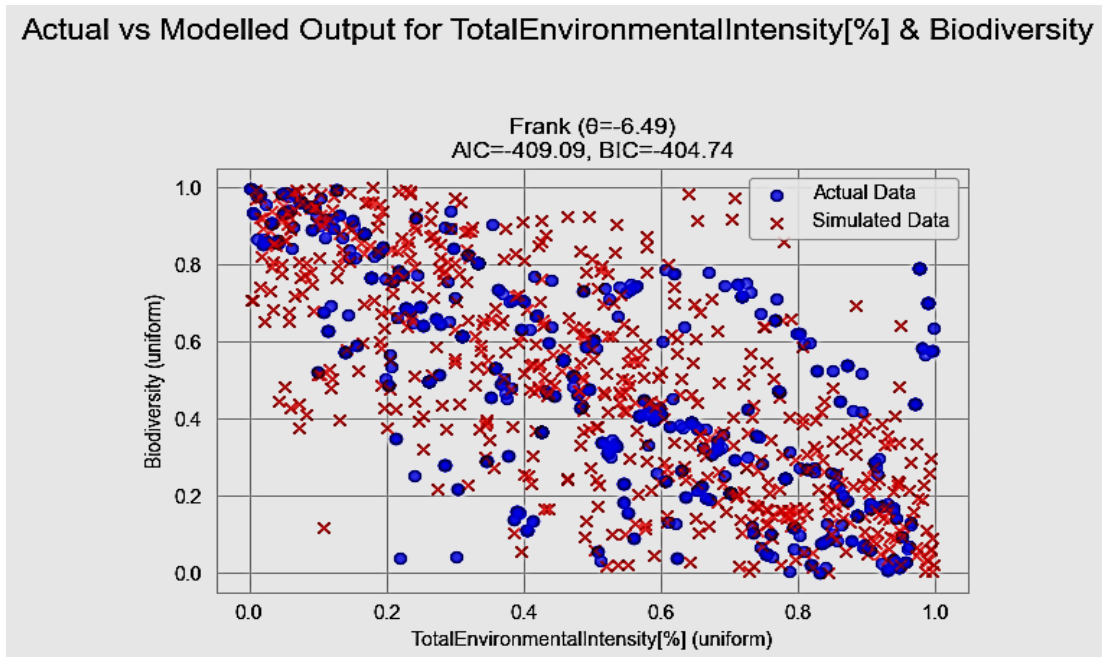
де D = Debt-Equity Ratio; E = Total Environmental Intensity [%].

Із семи найкращих пар параметрів модель Франка виявилася найбільш ефективною для чотирьох пар. Це свідчить про певну міру зваженої залежності між даними. Особливо варто зазначити, що відповідно до отриманих оцінок якості, ми отримали додаткове підтвердження наявності залежностей між екологічними і економічними факторами.

Для перевірки коректності моделей, було проведено моделювання на основі розрахованих копул і отримано графічне представлення розподілу значень (див. рисунок).

Наступним етапом став розрахунок імовірності отримання вектора аномальних параметрів. Цей вектор складається з двох значень, що описують маржинальну ймовірність аномально високого значення на рівні 99-го перцентиля та вище. При найвньому підході ці ймовірності можна розглядати як ймовірності, що описують поведінку незалежних випадкових величин.

На основі даних було отримано три значення ймовірності для подібного вектора аномалій: наївний підрахунок, що ґрунтується на добутку ймовірностей; непараметричний підрахунок, здійснений на основі історичних даних та емпіричної функції розподілу; параметричний підрахунок, виконаний на основі копул (табл. 2). Слід зазначити, що деякі комбінації екстремальних даних відсутні в нашому наборі даних. Це може бути пов'язано як із взаємовиключенням подій, так і з відсутністю інформації щодо можливих варіантів.



Результати моделювання на основі копул

Таблиця 2. Оцінка значень перцентилів розподілів для найвного, непараметричного та параметричного (копульного) підходів

Група параметрів	Тип копули	Наївний перцентиль	Непараметричний підхід	Значення на основі копули
TotalEnvironmentalIntensity[%] & Biodiversity	Frank	1.00e-04	0.00e+00	1.00e-06
ReturnOnEquity & DebtEquityRatio	Gumbel	1.00e-04	8.77e-03	2.94e-03
ReturnOnEquity & TotalEnvironmentalIntensity[%]	Frank	1.00e-04	0.00e+00	1.88e-04
ReturnOnEquity & Biodiversity	Frank	1.00e-04	0.00e+00	7.00e-05
DebtEquityRatio & Biodiversity	Clayton	1.00e-04	0.00e+00	1.10e-04
DebtEquityRatio & TotalEnvironmentalIntensity[%]	Frank	1.00e-04	0.00e+00	9.10e-05

Для групи параметрів TotalEnvironmentalIntensity[%] та Biodiversity було отримано значення ймовірності для параметричного та непараметричного підходів, які виявилися значно меншими, ніж очікувалося за умови незалежності. Це свідчить про виключення можливості настання подій при високих значеннях обох параметрів у розподілах.

Параметри ReturnOnEquity та DebtEquityRatio також демонструють узгодженість у значеннях, надаючи меншу ймовірність настанню спільної події, що була розрахована на основі найбільш підходящої копули. Найбільш цікавими для нашої задачі є випадки, коли значення спільної ймовірності для непараметричного підходу має значення близьке до 0, а для параметричного підходу на основі копул, значення спільної ймовірності є значно більшим. Поясненням цього може бути відсутність інформації щодо їхнього значення в наявних даних. У такому випадку додаткова

інформація надається за допомогою параметричної моделі, що описує поведінку та залежність значень.

Висновки

Сфера застосування копул розширюється і охоплює все більше різноманітних і прикладних областей. Однією із можливостей таких застосувань є аналіз «зелених ризиків», які поєднують вплив проєктів на екологію з їхньою економічною ефективністю. Використання копул для моделювання залежностей і оцінювання параметрів розподілів для великої кількості факторів дозволяє провести порівняння різноманітних залежностей, що, в свою чергу, надає можливість підібрати ефективну та точну функцію зв'язку.

Використання копул для визначення функціональних залежностей є перспективним напрямом, що дозволяє оцінювати різні міри залежностей. Особлива важливість цього підходу полягає в дослідженні залежностей, які можна охарактеризувати як залежності між аномальними значеннями. Для «зелених проєктів» подібні дослідження мають прикладний характер, оскільки з точки зору функціонування складних систем є можливість зберігати стабільність системи за різних умов, якщо значення одного параметра виходять за допустимі межі. У цьому випадку можна говорити про використання системою певного запасу міцності та стійкості. Проте підтримувати функціонування проєкту, коли кілька ключових параметрів мають аномальні значення синхронно, в більшості випадків не є можливим.

Іншим напрямом поглиблення даного дослідження є чисельне визначення ризику, який зазвичай розраховується за умови незалежності факторів, наприклад, за допомогою Value-At-Risk. Такі обмеження під час роботи призводять до некоректних оцінок, що занижують ризик. Урахування зв'язків між змінними та додатковий аналіз залежностей екстремальних значень дозволяє глибше зрозуміти причини виникнення цього ризику, а також їхні ефекти та впливи. Зокрема, під час проведеного моделювання вдалося отримати уточнену оцінку взаємозалежностей між параметрами порівняно з наївним підходом, який ґрунтується на незалежних факторах.

1. Кузнецова Н.В., Шевчук, О. С. Моделі оцінки ризиків зелених проєктів. *Ресурсна, збереження і оброб. даних*. 2024. Т. 26, № 1. С. 144–153. <https://doi.org/10.35681/1560-9189.2024.26.1.308752>.

2. McNeil A.J., & Frey R. Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: An Extreme Value Approach. *Journal of Empirical Finance*. 2000. 7(3–4). P. 271–300. [https://doi.org/10.1016/S0927-5398\(00\)00012-8](https://doi.org/10.1016/S0927-5398(00)00012-8).

3. Chen N., Ribeiro B., & Chen A. Financial credit risk assessment: A recent review. *Artificial Intelligence Review*. 2016. 45(1). P. 1–23. <https://doi.org/10.1007/s10462-015-9434-x>.

4. Mahmoud S.H., & Gan T.Y. Urbanization and climate change implications in flood risk management: Developing an efficient decision support system for flood susceptibility mapping. *Science of the Total Environment*. 2018. 636. P. 152–167. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2018.04.282>.

5. Embrechts P., Lindskog F., & McNeil A.J. Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management. In *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*. 2003. Vol. 8. P. 329–384. <https://doi.org/10.1016/B978-044450896-6.50010-8>.

6. Kuznietsova N.V., Huskova V.H., Bidyuk P.I., Matsuki Y. Modeling risk factors interaction and risk estimation with copulas. *Radio Electronics, Computer Science, Contro*. 2022. 2. P. 43–43.

7. Bidyuk P., Trofymchuk O., Kalinina I., & Gozhyj A. Modeling Risk Factor Interaction Using Copula Functions. In CITRisk. 2020. P. 87–101. CEUR Workshop Proceedings, 2805. CEUR-WS.
8. Kuznietsova N., Kvashuk I., & Bidyuk P. Survival models as copulas for green risks prediction. In Information Technologies and Security. Extended Abstracts of the XXIV International Scientific and Practical Conference ITS-2024. Kyiv, Ukraine: Engineering, 2024. P. 202. ISBN: 978-617-8180-00-3.
9. Breymann W., Dias A., & Embrechts P. Dependence Structures for Multivariate High-Frequency Data in Finance. *Quantitative Finance*. 2003. **3**(1). P. 1–14. <https://doi.org/10.1080/713666155>.
10. Embrechts P., Resnick S., & Samorodnitsky G. Extreme Value Theory as a Risk Management Tool. *North American Actuarial Journal*. 1999. **3**(2). P. 30–41. <https://doi.org/10.1080/10920277.1999.10595797>.
11. Balkema G., & Embrechts P. High Risk Scenarios and Extremes: A Geometric Approach. European Mathematical Society Publishing House. 2007. 375. <https://doi.org/10.4171/035>.
12. Joe, H. (1997). Multivariate Models and Multivariate Dependence Concepts. Chapman and Hall/CRC. 424. <https://doi.org/10.1201/9780367803896>.
13. Nelsen R.B. An Introduction to Copulas. Springer Series in Statistics. 2006. 272. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3076-0>.
14. Yu R., Yang R., Zhang C., Špoljar M., Kuczyńska-Kippen N., & Sang G. A Vine Copula-Based Modeling for Identification of Multivariate Water Pollution Risk in an Interconnected River System Network. *Water*. 2020. **12**(10), Article 2741. <https://doi.org/10.3390/w12102741>.
15. Guillen M., Perch Nielsen J., & Bolanča A. Machine Learning Methods for Conditional Tail Expectation Estimation. *Insurance: Mathematics and Economics*. 2021. **99**. P. 103–119. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2021.03.009>.
16. Sillmann J., Shepherd T.G., & van den Hurk B. (Eds.). Climate Extremes and Their Implications for Impact and Risk Assessment. Elsevier. 2020. 376. <https://doi.org/10.1016/C2017-0-01794-9>.
17. Zhao X., Hwang B.G., & Gao Y. A fuzzy synthetic evaluation approach for risk assessment: A case of Singapore's green projects. *Journal of Cleaner Production*. 2016. **115**. P. 203–213. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2015.11.042>.
18. Peng C.Y.J., Lee K.L., & Ingersoll G.M. An Introduction to Logistic Regression Analysis and Reporting. *The Journal of Educational Research*. 2002. **96**(1). P. 3–14. <http://dx.doi.org/10.1080/00220670209598786>.
19. Song Y.Y., Lu Y. Decision tree methods: applications for classification and prediction. *Shanghai Arch Psychiatr*. 2015. **27**(2). P. 130–135. <https://doi.org/10.11919%2Fj.issn.1002-0829.215044>.

Надійшла до редакції 25.04.2025