

DOI: 10.35681/1560-9189.2025.27.2.345594

УДК 004.42

С. В. Терлецький, Є. О. Гофман

Національний університет «Запорізька політехніка»
вул. Жуковського, 64, 69063 Запоріжжя, Україна

Удосконалення методу боксового покриття для вирішення задач обробки зашумлених зображень

Для аналізу та класифікації цифрових зображень, що мають складну структуру, зараз широко використовується фрактальний аналіз. У роботі розглянуто алгоритм боксового покриття для обчислення фрактальної розмірності зображень. Стандартний алгоритм обчислення фрактальної розмірності на основі боксового покриття використовує рівномірне покриття. Однією із проблем такого методу є погана адаптація до складних нерівномірних структур, що є характерним для картографічних зображень. Для забезпечення більш точної оцінки фрактальної розмірності запропоновано використовувати нерівномірне покриття на основі логарифмів і на основі послідовності Фібоначчі. На основі метрик MAE та E показано, що для використання складних за структурою зображень логарифмічне покриття та покриття на основі послідовності Фібоначчі дозволяють покращити точність роботи алгоритму визначення фрактальної розмірності. Проведено експериментальне дослідження, яке показало, що для високого рівня зашумленості похибки вдосконалених алгоритмів наближаються до похибки стандартного алгоритму, однак алгоритм на основі послідовності Фібоначчі забезпечує більшу стабільність у розрахунку фрактальної розмірності для зображень з різним рівнем зашумленості.

Ключові слова: боксове покриття, фрактальна розмірність, цифрові зображення, логарифмічна послідовність, послідовність Фібоначчі.

Вступ

Візуалізація даних або використання візуальних описів для явищ і процесів є одним із найбільш поширених методів, що застосовуються в різних областях науки та техніки. Фрактальний аналіз — це метод, який дозволяє досліджувати і описувати складні, самоподібні структури, які часто зустрічаються в природі та різних областях науки. Він має велике значення, наприклад, у медицині для аналізу структури кровоносних судин, легень, нервової системи, виявлення аномалій у медич-

них зображеннях [1], аналізу структури рослин, тварин, екосистем. Також, фрактальний аналіз часто використовують для аналізу географічних зображень, а саме, аналізу берегових ліній, гірських хребтів [2], річкових систем, класифікації і сегментації картографічних знімків.

Одним із параметрів, що характеризує складність зображень, є фрактальна розмірність. Її використання дає змогу оцінити та порівняти структури об'єктів на зображеннях. Алгоритми, які застосовуються для обчислення фрактальної розмірності зображень, добре працюють для зображень з чітко вираженою структурою, що, разом з відсутністю простих у використанні та вільно розповсюджуваних програмних засобів, може обмежити широке використання фрактальних методів в аналізі цифрових зображень.

Запропоновані алгоритми забезпечують кращу точність при обчисленні фрактальної розмірності складних картографічних зображень. Основною ідеєю даних алгоритмів є використання нерівномірного масштабу, що робить алгоритми менш чутливими до дрібних зашумлених деталей.

Аналіз літературних джерел і постановка проблеми

Однією із головних відмінностей між фракталами, які зустрічаються на практиці, і їхніми математичними аналогами є існування кінцевої межі властивості масштабування в будь-якому реальному фракталі. Для реальних фрактальних зображень існують суворі обмеження, що виникають через обмежену роздільну здатність зображення та ефект шуму. Тому для складних цифрових зображень намагаються використовувати більш досконалі алгоритми.

У роботі [3] автори показали, що шум значно впливає на розраховані фрактальні розмірності (відносне збільшення до 20 %), і що цей вплив залежить від застосованого алгоритму та характеристик заповнення простору досліджуваних фрактальних структур. Автори статті пропонують використовувати кілька алгоритмів для розрахунку фрактальної розмірності, щоб зменшити вплив шуму. Фрактальна розмірність розраховується за допомогою кореляційної розмірності пар, розмірності боксового покриття, кореляційної розмірності фіксованої сітки та підходу «перетягування канату». Автори показали, що метод боксового покриття не є надійним при наявності шуму.

У роботі [4] для рішення проблеми точності для медичних зображень пропонується використовувати вдосконалену техніку підрахунку, яка базується на підрахунку диференціальних боксів. Автори наводять приклади застосування даного алгоритму та доводять його ефективність для виявлення різних медичних аномалій. Однак застосування цього методу в інших областях не здійснювалось, і ставиться під сумнів його ефективність.

У статті [5] автори пропонують оцінювати фрактальну розмірність для кристалічних структур тваринних жирів. Вони використовують метод фрактальної сигнатури, який обчислює фрактальну розмірність зображення (або його частини) шляхом побудови спеціальної поверхні. Другий метод дозволяє обчислити мультифрактальний спектр за допомогою так званої функції щільності для поділу зображення на фрактальні підмножини. І останній спосіб дозволяє отримати мультифрактальний спектр у параметризованому вигляді за допомогою узагальненої ста-

тистичної суми. Всі методи є занадто складними для обчислення фрактальної розмірності картографічних зображень.

У статті [6] автор пропонує алгоритм, орієнтований на пряме застосування до файлів зображень, що працюють зі звичайними програмними інструментами, і його можна використовувати без подальшої попередньої обробки, незалежно від того, як зображення було отримано або створено. Алгоритм базується на використанні методів стискання файлів, що не завжди можливо для зображень, які не отримані програмно.

Прості алгоритми, зазвичай, добре працюють на якісних зображеннях з чітко вираженою структурою. Однак географічні карти можуть бути досить складними для аналізу, та мають складний характер. Тому, для більш точного опису таких зображень необхідно використовувати більш досконалі методи, які можуть врахувати неоднорідність заповнення простору зображення, що є характерним у картографії. Отже, для роботи з ними необхідно розробити алгоритм, який підвищує точність обробки.

Розробка вдосконалених алгоритмів боксового покриття

Будь-яке зображення можна визначити як двовимірну функцію $f(x, y)$, де x та y — просторові координати, а амплітуда f в будь-якій парі координат (x, y) називається інтенсивністю, або рівнем сірого зображення в цій точці. У цифровому зображенні x , y та значення амплітуди f є скінченними дискретними величинами. Текстура є основною характеристикою будь-якого зображення, яка визначає особливості співвідношення між значеннями градації сірого пікселів в області зображення [7].

Геометричні примітиви, які є самоподібними та нерегулярними за своєю природою, називаються фракталами. Фрактальна геометрія була представлена в 1982 році Мандельбротом і з роками найшла широке застосування. Однією із основних задач фрактального аналізу є визначення фрактальної розмірності досліджуваного об'єкта.

Фрактальна розмірність показує тенденції змін поверхонь і країв відносно до деталей самих структур [7]. Таким чином, фрактальна розмірність показує, наскільки складною є структура об'єкта, і як він заповнює простір. На відміну від звичайної евклідової розмірності (1D, 2D, 3D), фрактальна розмірність може бути дробовим числом, що відображає самоподібність і нерегулярність об'єкта. Вона відображає, наскільки деталізованим є об'єкт у різних масштабах. Чим вища фрактальна розмірність, тим більше деталей зберігається при збільшенні. Також, за допомогою фрактальної розмірності можна визначити, як об'єкт заповнює простір. Наприклад, крива з фрактальною розмірністю між 1 і 2 заповнює площину більше, ніж звичайна лінія, але менше, ніж площа. Крім того, фрактальна розмірність відображає нерегулярність і хаотичність об'єкта: чим вища фрактальна розмірність, тим більш нерегулярним є об'єкт. Отже, фрактальна розмірність є потужним інструментом для кількісного опису складності та структури об'єктів, які не можуть бути адекватно описані за допомогою звичайної евклідової геометрії.

Фрактальна розмірність є важливою характеристикою фракталів, оскільки вона містить інформацію про їхню геометричну структуру. Топологічний розмір (визначений як d) об'єкта не зміниться, незалежно від трансформації, яку зазнав

об'єкт. Фрактальна розмірність (визначена як D) об'єкта зазвичай перевищує його топологічний розмір (тобто $D > d$).

В обмеженій множині X , що розглядається в евклідовому n -просторі, множина X називається самоподібною, якщо X є об'єднанням N_r різних копій себе, які не перекриваються, кожна з яких подібна до X , зменшеного відносно r . Фрактальну розмірність D для множини X можна отримати зі співвідношення [7, 8]:

$$D_f = \frac{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log N(\varepsilon)}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}. \quad (1)$$

Значення фрактальної розмірності лежить у діапазоні $D \in [0; E]$, де E означає розмірність евклідового простору ($E = 2$). Межі діапазону значень фрактальної розмірності також можна описати так:

— для зміни структури як функції розміру її міра є максимальною (це характерно для структур зображення, де аналізована структура становить лише невелику частину повного зображення, наприклад, якийсь колір має дуже незначне представлення в зображенні або довжина межі між різними кольорами дуже коротка), $D \rightarrow 0$;

— зміна структури не залежить від зміни міри (аналізована структура заповнює зображення майже повністю, наприклад, один колір має більшість у зображенні або край заповнює все зображення — крива Пеано), $D \rightarrow 2$.

Метод, який найбільш часто використовують для визначення фрактальних параметрів зображення, називається методом боксового покриття. Даний метод дає змогу аналізувати чорно-білі зображення, що отримані шляхом порогового перетворення кольорового зображення відповідно до заданих критеріїв (наприклад, у просторах RGB, HSV, HSB).

Для алгоритмів обробки зображень суттєвою є обчислювальна складність, яка описує скільки ресурсів, а саме часу, потребує алгоритм залежно від розміру вхідних даних. Адже зростання роздільної здатності безпосередньо збільшує кількість пікселів, і навіть невелике ускладнення методу суттєво впливає на швидкість обробки та придатність алгоритму для практичного застосування.

Метод боксового покриття має середню складність серед основних підходів для обчислення фрактальної розмірності. Даний алгоритм потребує менше ресурсів, порівняно з кореляційним методом, але більше, ніж оптимізований мас-радіус. Відтак, завдяки простоті його зручно використовувати у практичних задачах обробки картографічних зображень, хоча для задач з великими зображеннями критично важливо оптимізувати його за рахунок оптимізації побудови покриття.

Для розрахунку фрактальної розмірності використовуються різні способи. Серед них найбільш розповсюдженим є метод боксового покриття. Метод обчислює кількість комірок, необхідних для повного покриття об'єкта сітками комірок різного розміру. На практиці це виконується шляхом накладання регулярних сіток на об'єкт і підрахунку кількості зайнятих комірок (рис. 1). Для цього розглядається зображення $M \times M$, де $M = 2^k$, воно сегментується за допомогою боксів розміром $R = \frac{M}{\varepsilon}$ ($R = 2^i, i = 0, \dots, k$), і підраховується кількість боксів, які закривають об'єкт, $N(R)$. Потім фрактальна розмірність розраховується за формулою [7, 8]:

$$D_f = \frac{\ln(N(R))}{\ln(R)}, R \neq 1. \quad (2)$$

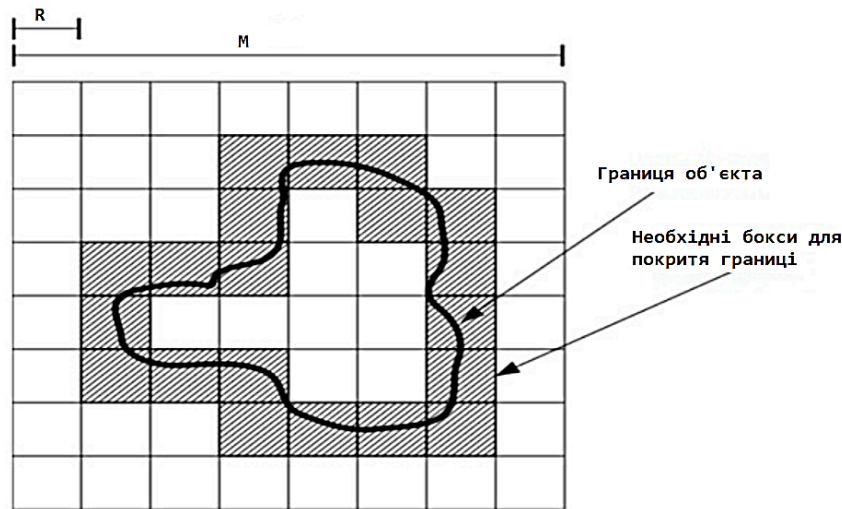


Рис. 1. Метод боксового покриття

Метод боксового покриття є досить ефективним для оцінки фрактальної розмірності, але він має низку недоліків:

- 1) обчислювальна складність — необхідність багаторазового покриття зображення сіткою різного масштабу;
- 2) чутливість до шуму — дрібні варіації можуть впливати на точність оцінки;
- 3) дискретність масштабу — обмежена кількість рівнів розбиття сітки.

Зміна принципу розбиття: стандартний підхід передбачає використання фіксованого множника для зміни розміру боксів (наприклад, 2×2 , 4×4 , ...). Замість цього, можна використовувати логарифмічну шкалу, наприклад, послідовність Фібоначчі (масштаби $\varepsilon = 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$).

Розглянемо запропоновані методи.

При використанні логарифмічної зміни масштабу алгоритм розрахунку фрактальної розмірності має наступний вигляд.

1. Розбиття зображення на комірки з логарифмічною зміною масштабу:
 - на початку використовуються бокси максимального розміру $r_{\max}$;
 - на кожному кроці розмір боксу зменшується за логарифмічною шкалою:

$$r_{k+1} = r_k \cdot \alpha.$$

Наприклад, $\alpha = 0,8$ означає, що кожен наступний розмір на 20 % менший.

2. Підрахунок заповнених комірок:

— визначається, скільки комірок заповнені білими пікселями для кожного масштабу.

3. Обчислення фрактальної розмірності:

— будується залежність $\ln(N(r))$ від $\ln(\frac{1}{r})$;

— здійснюється апроксимація та знаходиться нахил прямої D .

Даний нахил і буде фрактальною розмірністю зображення.

Алгоритм боксового покриття із використанням розбиття на основі послідовності Фібоначчі виглядає наступним чином.

1. Формування шкали боксів:

— генерується послідовність Фібоначчі:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3; \quad (3)$$

— масштабуються отримані числа так, щоб вони відповідали розмірам боксів:

$$r_i = k \cdot F_i, \quad (4)$$

де k — коефіцієнт для корекції масштабу;

— відбираються розміри r_i , що вкладаються в розміри зображення, тобто $r_i < \min(h, w)$.

2. Підрахунок кількості боксів $N(r)$, для кожного розміру бокса r_i :

— розбивається зображення на бокс-сітку розміром r_i ;

— підраховується кількість боксів, що містять хоча би один чорний піксель.

3. Обчислення фрактальної розмірності:

— виконується лінеаризація в логарифмічній шкалі:

$$\ln N(r) = D \ln \left(\frac{1}{r} \right);$$

— здійснюється апроксимація та знаходиться нахил прямої D .

Для оцінки методів і їхнього порівняння необхідно використовувати метрики оцінки похибок.

MAE визначає середню абсолютну похибку між фактичними значеннями та значеннями, передбаченими лінійною апроксимацією:

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |N_i - (mS_i + c)|,$$

де N_i — фактичні значення (логарифм кількості боксів);

S_i — логарифм масштабу боксу $\ln(\frac{1}{r_i})$;

m та c — коефіцієнти апроксимуючої прямої (нахил і зсув);

n — кількість точок.

Метрика ортогональної відстані обчислює середню відстань кожної точки до апроксимуючої прямої:

$$E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|N_i - (mS_i + c)|}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Метрика E є більш точною, оскільки вимірює ортогональну відстань до апроксимуючої прямої, а не лише різницю по осі y , як MAE.

Стандартне боксове покриття вимагає побудови регулярних сіток для кожного масштабу. Якщо розмір зображення дорівнює $M \times M$, то кількість операцій зростає приблизно як $O(M^2 \log M)$ через кількаразове розбиття та підрахунок комірок. Логарифмічне покриття зменшує кількість рівнів масштабів за рахунок логарифмічної сітки. Власне це дає змогу скоротити кількість повторних обчислень на 20–30 % порівняно зі стандартним методом, зберігаючи точність. А покриття за послідовністю Фібоначчі вимагає додаткового формування шкали, однак кількість рівнів зазвичай менша, ніж у регулярного методу. Тому загальна складність також зменшується, наближаючись до логарифмічного випадку.

Таким чином, оптимізація за рахунок змін у побудові сітці дозволяє зменшити обчислювальну складність боксового алгоритму. За рахунок цього, оптимізований

алгоритм боксового покриття може бути використаний для аналізу зображень різного розміру.

Експерименти та результати

Перевірка роботи методів здійснювалася на картографічних зображеннях. Зразок зображення наведено на рис. 2 [9]. Розмір зображення — 713×582 пікселів. Воно відображає берегову лінію Атлантичного узбережжя США та частину материка. Зображення є складним, нерівномірним, що дозволяє вивчити поведінку запропонованих методів. Дане зображення дозволяє перевірити роботу алгоритмів на реальних даних. Наявність чіткої границі між сушею і океаном дає змогу провести чітку бінаризацію зображення, тобто представлення його в чорно-білому форматі.

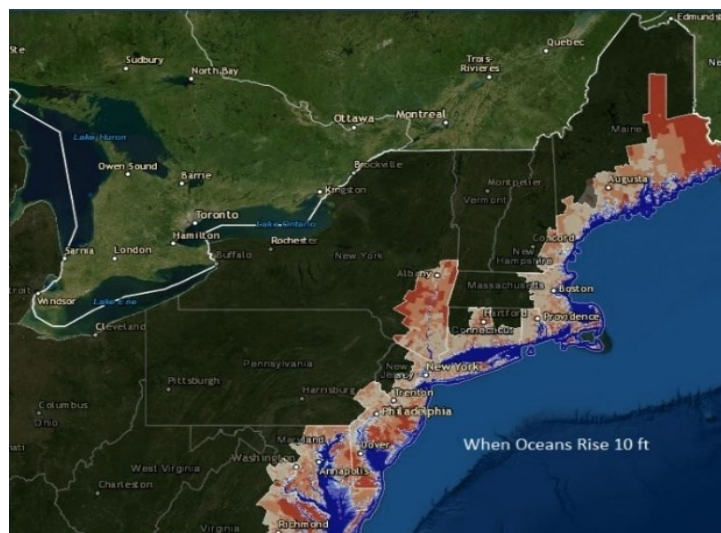


Рис. 2. Картографічне зображення, що використовувалося для аналізу методів (NOAA model of 10ft ocean rise along the northeastern coast)

Для порівняльної оцінки методів боксового покриття також проводилося штучне зашумлення зображення. Для цього використовувався метод «Сіль і перець» (Salt and Pepper Noise). Це один із найбільш простих способів додавання шуму до зображення. Він імітує випадкові імпульсні спотворення, що можуть виникати, наприклад, через перешкоди в передачі даних або дефекти сенсорів камери. Такого роду модель є показовою для перевірки чутливості алгоритмів до локальних імпульсних спотворень, що часто зустрічаються при оцифруванні та передачі картографічних зображень. Такий шум створює точкові артефакти, які різко змінюють локальну структуру та дозволяють оцінити, наскільки алгоритм стійкий до раптових змін яскравості.

Метод випадковим чином замінює деякі пікселі на білий колір («сіль»), а деякі інші — на чорний «перець». Частка пікселів, що замінюється, визначається рівнем контролю шуму. Для кожного пікселя $I(x, y)$

$$I'(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{з імовірністю } p/2, \\ 255, & \text{з імовірністю } p/2, \\ I(x, y), & \text{з імовірністю } 1 - p, \end{cases}$$

де $I(x, y)$ — початкове значення пікселя;
 $I'(x, y)$ — значення після шуму;
 p — рівень шуму (наприклад, 5 % = 0,05).

Побудовані регресії для чистого зображення наведено на рис. 3–5.

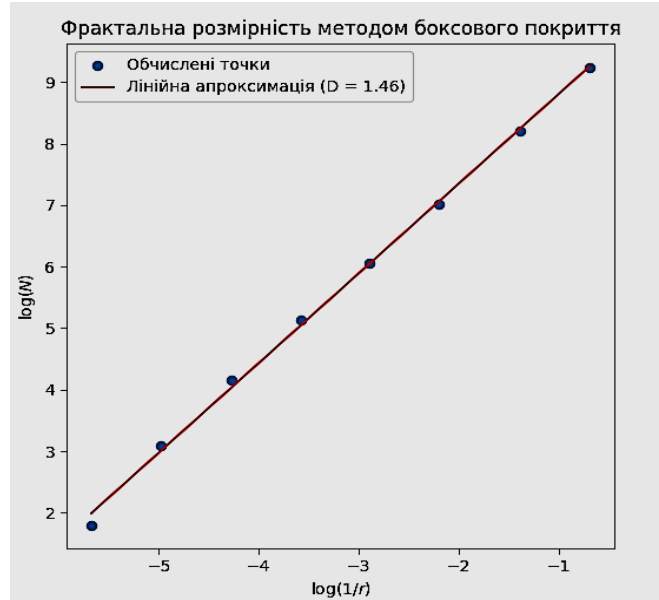


Рис. 3. Апроксимаційна лінія для чистого зображення (стандартне боксове покриття)

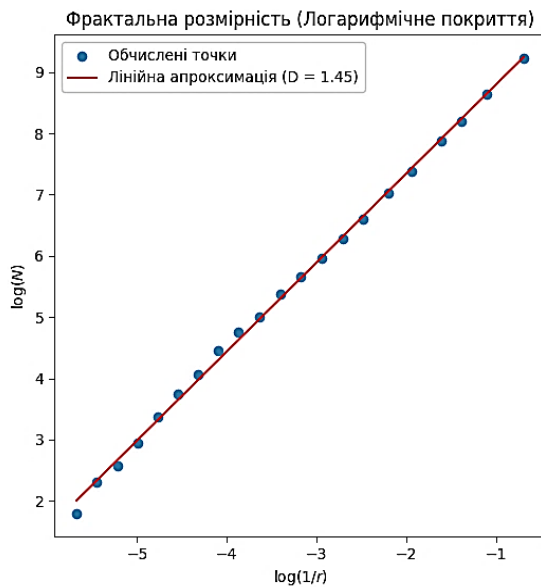


Рис. 4. Апроксимаційна лінія для чистого зображення (логарифмічне покриття)

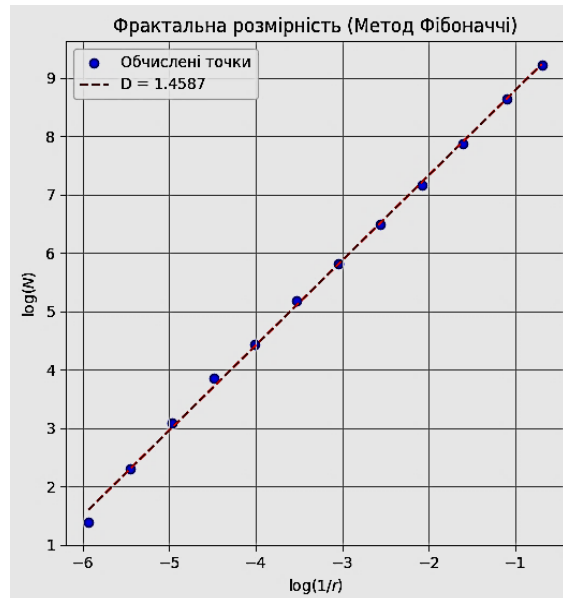


Рис. 5. Апроксимаційна лінія для чистого зображення (покриття за методом Фібоначчі)

Результати порівняння фрактальної розмірності та її похибки наведено в таблиці.

Порівняльні розрахунки фрактальної розмірності
і оцінок похибок для зображення з різним рівнем шуму

Рівень шуму	Стандартне покриття			Логарифмічне покриття			Метод Фібоначчі		
	D	MAE	E	D	MAE	E	D	MAE	E
0 %	1,46	0,076	0,139	1,45	0,062	0,132	1,45	0,057	0,116
10 %	1,74	0,23	0,21	1,78	0,17	0,18	1,74	0,2	0,2
20 %	1,81	0,17	0,18	1,84	0,12	0,15	1,81	0,14	0,17
30 %	1,85	0,13	0,15	1,87	0,09	0,13	1,84	0,1	0,14
40 %	1,87	0,11	0,14	1,89	0,084	0,12	1,85	0,097	0,13
50 %	1,88	0,1	0,13	1,9	0,07	0,11	1,87	0,09	0,13
60 %	1,89	0,08	0,12	1,91	0,07	0,11	1,87	0,08	0,13
70 %	1,9	0,077	0,12	1,91	0,67	0,1	1,88	0,08	0,12
80 %	1,9	0,07	0,11	1,91	0,065	0,1	1,88	0,08	0,12
90 %	1,9	0,068	0,11	1,92	0,063	0,1	1,89	0,07	0,12

Обговорення результатів

Проведене моделювання показує, що для стандартного покриття фрактальна розмірність зростає швидше зі збільшенням шуму, досягаючи 1,9 при 90 % шуму. Для логарифмічного покриття D зростає трохи швидше, досягаючи 1,92. За методом Фібоначчі D змінюється повільніше за всі інші методи. Отже, при збільшенні шуму фрактальна розмірність зростає, оскільки збільшується складність структури зображення, але методи логарифмічний і Фібоначчі дають менше викривлень, ніж звичайне покриття.

Для чистого зображення логарифмічне та Фібоначчі-покриття мають нижчі значення MAE, що свідчить про кращу точність. При збільшенні шуму похибка росте, але у стандартного покриття MAE залишається вищою, ніж у логарифмічного. При 90 % шуму всі методи дають схожі значення (~0,07), але логарифмічне покриття має найменшу похибку. Отже, логарифмічне покриття є найбільш стабільним до шуму, а метод Фібоначчі показує баланс між точністю і стійкістю. На чистому зображенні (0 %) значення E найменші в удосконалених методів. При зростанні шуму показники E залишаються меншими у логарифмічного та Фібоначчі-методів, ніж у стандартного методу. Однак, починаючи з 70 % шуму, помилка у вдосконалених методів уже не суттєво нижча за звичайний метод. Удосконалені методи краще працюють на чистих зображеннях, але при сильному шумі їхня перевага зменшується.

Висновки

Проведене моделювання показало, що рівень імпульсного шуму, збільшуючи складність зображення, збільшує похибку всіх методів, але найбільшу похибку дає стандартне покриття. При менших рівнях шуму вдосконалені методи показують кращі результати, але зі збільшенням зашумленості зображення їхні похибки наближаються до похибки стандартного методу. Метод Фібоначчі є компромісом між регулярним і логарифмічним, забезпечуючи стабільність обробки зображення. За-

галою, запропоновані алгоритми вигідно відрізняються з точки зору точності порівняно з методами, які зазвичай використовуються для оцінки розмірності фрактальних послідовностей. З позицій «вартість/точність» стандартне покриття є найбільш дешевим для реалізації, але менш стійким до шуму; логарифмічне покриття дещо складніше в реалізації, проте дає найменші похибки; метод Фібоначчі займає проміжне положення, забезпечуючи баланс між точністю та обчислювальними витратами.

У роботі вирішено актуальне науково-практичне завдання підвищення точності алгоритмів боксового покриття для розрахунку фрактальної розмірності картографічних зображень.

Наукова новизна роботи полягає в тому, що запропоновано вдосконалений метод боксового покриття, в якому використовуються нерівномірні масштаби боксового покриття, які засновані на логарифмічній послідовності та послідовності Фібоначчі. Це дало змогу підвищити точність алгоритму боксового покриття для розрахунку фрактальної розмірності картографічних зображень.

Подальше дослідження повинне бути направлене на розробку методів, які зменшують обчислювальну складність алгоритмів розрахунку фрактальної розмірності. Також планується здійснити аналіз використання алгоритму для зображень, спотворених моделями «гаусового» та «плямового» шумів.

1. Kato C.N., Barra S.G., Tavares N.P.K., Amaral T.M.P., Brasileiro C.B., Mesquita R.A., & Abreu L.G. Use of fractal analysis in dental images: A systematic review. *Dentomaxillofacial Radiology*. 2020. 49(2). 20180457. <https://doi.org/10.1259/dmfr.20180457>
2. Miao T., Yu B., Duan Y., & Fang Q. A fractal analysis of permeability for fractured rocks. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2015. **81**. P. 75–80. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.10.010>
3. Reiss M.A., Sabathiel N., & Ahammer H. Noise dependency of algorithms for calculating fractal dimensions in digital images. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2015. **78**. P. 39–46.
4. Nayak S.R., & Mishra J. Analysis of medical images using fractal geometry. In I. Management Association (Ed.). *Research anthology on improving medical imaging techniques for analysis and intervention*. 2023. P. 1547–1562. IGI Global. <https://doi.org/10.4018/978-1-6684-7544-7.ch078>
5. Ampilova N., Soloviev I., & Barth J.-G. Application of fractal analysis methods to images obtained by crystallization modified by an additive, *Journal of Measurements in Engineering*. Jun. 2019. Vol. 7, No. 2. P. 48–57. <https://doi.org/10.21595/jme.2019.20436>.
6. Chamorro-Posada Pedro. A simple method for estimating the fractal dimension from digital images: The compression dimension. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2016. **91**. 10.1016/j.chaos.2016.08.002.
7. Losa G., Ristanović D., Ristanović D., Zalel I., & Beltraminelli S. From fractal geometry to fractal analysis. *Applied Mathematics*. 2016. **7**. P. 346–354. <https://doi.org/10.4236/am.2016.74032>.
8. Zmeškal O., Veselý M., Nežádal M., & Buchniček M. Fractal analysis of image structures. In *Harmonic and fractal image analysis*. 2001. P. 3–5.
9. When oceans rise 10 ft. *The Herkimer Post*. 2022, August 29. URL: <https://herkimerpost.com/index.php/2022/08/29/when-oceans-rise-10-ft/>

Надійшла до редакції 16.06.2025