DOI: 10.35681/1560-9189.2025.27.2.345502

УДК 519.863

А. І. Кузьмичов
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна
e-mail: akuzmychov@gmail.com

Лінійна модель транспортної задачі локації-релокації об'єктів у логістичній мережі

Базовою платформою для моделювання задач стратегічного планування логістичних систем обрано мережеву транспортну задачу (Transshipment Problem, TSP), де проміжні пункти є потенційними місцями-кандидатами на розташування специфічних об'єктів щодо їхнього оточення. При поточному плануванні, зі зміною умов і значень вхідних параметрів, здійснюється реконфігурація мережі шляхом релокації потенціалів існуючих джерел. За кожним оновленим варіантом структури мережі, локацією існуючих і нових джерел і призначень до них клієнтів, відшукується оптимальний розподіл одно- чи багатопродуктових потоків, які течуть від джерел, через проміжні пункти до стоків. Наведено постановку транспортної задачі location-relocation, її розв'язок за лінійною оптимізаційною моделлю отримано засобами Excel.

Ключові слова: *оптимізаційне моделювання в Excel, transshipment-location/allocation/relocation problems, Location Science and Analysis, Spreadsheet Modeling and Analytics.*

Вступ

Перевагою моделі TSP, націленої на проблематику зміни потоків різного типу і властивостей у проміжних вузлах логістичних мереж і ланцюгів постачання, є охоплення різних і важливих оптимізаційних задач з метою досягнення мінімальних витрат, пошуку найкоротшого маршруту чи найменшої тривалості процесу, та, головне, можливість оптимально розташовувати унікальні виробничі/сервісні об'єкти серед оточуючих їх точок попиту та визначати оптимальні потоки між ними. У випадках надзвичайних ситуацій карта локації і потенціалів джерел і відповідних потоків кардинально змінюється: окремі потоки вимушено посилюються, обмежуються чи блокуються, у певних вузлах розщеплюються чи зливаються. Через динамічний характер логістики із-за змушеного переміщення (релокації) існуючих джерел критичних ресурсів і зміни розподілу сукупних потужностей із-за появи нових джерел об'єктивно змінюється конфігурація мережі, її вузли змінюють свої функції тощо.

© А. І. Кузьмичов

Щоби оптимізаційна модель оперативно реагувала на ці зміни і відповідними розрахунками могла точно виокремлювати вузькі місця для вироблення, аналізу та прийняття рішень, вона має бути лінійною, простою і швидкою завдяки досконалому алгоритму.

Сучасна міждисциплінарна локаційна наука, складова ORMS[1], представляє специфічний аналітичний апарат математичного та комп'ютерного моделювання оптимізаційних потокових задач у логістичних мережах і ланцюгах постачання [4–6, 8, 9]. З появою розвинених комп'ютерних та інформаційних технологій вона узагальнила проблематику ланцюгів постачання, ставши активною та продуктивною галуззю глибоких досліджень і впроваджень відповідних результатів щодо розміщення/переміщення потрібних об'єктів для обслуговування точок попиту якнайкраще, з урахуванням реальних умов, обмежень і бажаних критеріїв оптимальності.

На початку 1960-х рр., за досягненим рівнем і досвідом оптимізаційних обчислень задач математичного програмування із використанням комп'ютерів формується напрям практичних задач Facility Location Problem щодо оптимальної локації нових точок (серверів) для обслуговування заданих точок попиту клієнтів, як-от клас нелінійних задач location-allocation problem про оптимальну локацію заданого/шуканого числа серверів, де кожна точка попиту має обслуговуватися одним сервером. У [3, 7] визначено клас дворівневих[2] задач transportation-location/allocation problem, де підкреслена визначальна роль локації серверів для оптимального розподілу потоків за моделлю класичної (матричної) транспортної задачі лінійного програмування, де потенціали серверів обмежені фіксованими значеннями пропозицій. У [3] використовується оригінальний гібридний алгоритм, де злагоджено діють дві покрокові оптимізаційні процедури ітераційного процесу: а) генерація нелінійним евристичним алгоритмом шуканих місць розташування серверів; б) оновлення матриці відстаней (як питомих витрат) і пошук оптимуму в лінійній транспортній моделі. Цей підхід став у нагоді в розробці оптимізаційної моделі дворівневої лінійної задачі transshipment-location/relocation problem, що і є предметом данної статті.

У наступні періоди активного розвитку аналітичних засобів ORMS локаційна теорія за обсягами постановок задач і ефективністю реальних застосувань отриманих результатів суттєво підсилюється: на невпинні замовлення практики ставляться нові і специфічні планові задачі великого розміру і ускладненої структури, детерміновані та стохастичні, розробляються відповідні математичні моделі, що належать основним класам: p-Median Problems, p-Center Problems, Covering Problems та Location-Routing Problems [14]. Останньому класу належить визначальна роль щодо

[1] Operations Research and Management Science (ORMS) — сучасна область наукових знань, базується на математичних і аналітичних методах для вироблення й прийняття оптимальних рішень в різних сферах діяльності людства, інститут INFORMS — міжнародна асоціація фахівців-аналітиків, видає 17 наукових журналів, у її складі Section on Location Analysis (www.informs.org)

[2] дворівнева оптимізаційна модель (optimization-optimization) — обчислювальна структура розв'язання двох спряжених і технологічно узгоджених оптимізаційних задач, внутрішньої і зовнішньої, «задача в задачі». Використовується для моделювання ієрархічних процесів вироблення та прийняття рішень в умовах визначеності (в умовах невизначеності використовується модель simulation-optimization). Застосування: ланцюги постачання, транспорт, збалансоване вироблення критичних ресурсів і їхній розподіл в умовах надзвичайних ситуацій, управління проєктами та проєктними програмами [15] тощо

транспортної складової ланцюгів постачання, враховуючи їхній глобальний вимір, перевезення різними транспортними засобами, перевалку вантажів у вузлах-хабах (transshipment points) і значущість транспортних витрат [10].

Кожна із цих задач зі специфічною цільовою функцією, застосовує великі набори даних з їхніми різноманітними структурами, тут шукані змінні різного типу, наближені до реальних умов і обмежень на їхні значення, використання усіх відомих модельних конструкцій, точних і наближених обчислювальних алгоритмів, що реалізуються потужними розподіленими обчислювачами, в навчально-дослідницькій практиці та самоосвіті зазвичай застосовують розвинені та доступні програмні продукти — надбудови електронних таблиць [2, 11–13].

Транспортна задача з проміжними пунктами

Узагальнена версія класичної транспортної задачі[3] — мережева транспортна задача (МТЗ, Transshipment Problem, [1])[4], де разом із джерелами та стоками є проміжні пункти (ПП) із фіксованим географічним розташуванням, зазвичай, це вузли-хаби, де зливаються, розділяються та перетворюються потоки різного типу та властивостей. Джерела та стоки мають потенціали, пропозиції або попит, потенціали проміжних вузлів, це їхні власні пропозиції/попит. Саме ці вузли, з їхніми заданими позиціями, — за нашим підходом — потенційні кандидати на розміщення нових джерел. Головна перевага МТЗ у дискретній локації — відомі відстані між вузлами для кожної дуги, попередньо розраховані за їхніми координатами, що надає локаційній моделі (часткову) властивість лінійності[5]. Локаційні обчислення базуються на розв'язанні оптимізаційних задач про потоки в мережах, де базовим обмеженням є баланс потоків у вузлі: сума потоків, що входять у вузол ($F_{вх}$), дорівнює сумі потоків, що виходять із вузла ($F_{вих}$), з урахуванням потенціалу вузла (пропозиція/попит). На схемі мережі дуга зображується стрілкою, що з'єднує пару вузлів[6], вістря стрілки, направлене у вузол-кінець, визначає вхідний дуговий потік, а її хвіст, з'єднаний з вузлом-початком, визначає вихідний дуговий потік, це використано у списку дуг табличної моделі. Список дуг заданий стовпцями: Початок, Кінець, Вага, Потік, список вузлів — стовпцями: Вузол, Обмеження (ЛЧ), Потенціал (ПЧ), формули для пошуку потоків (ліва частина у стовпці Обмеження):

= SUMIF(Початок;Поточний вузол;Потік), обчислює суму вихідних потоків ($F_{вих}$);

= SUMIF(Кінець;Поточний вузол;Потік), обчислює суму вхідних потоків ($F_{вх}$);

права частина обмеження — задані потенціали вузлів.

<u>Приклад</u>.

Задана змішана мережева структура:

— 5 вузлів-джерел (d1 … d5), їхні потенціали (діапазон D4:D8);

---

[3] мережева за походженням, у моделі представлена матрицями відстаней і потоків «кожен з кожним» розміром $m \times n$ (m, n — число вузлів-джерел і вузлів-стоків)

[4] у запропонованій моделі представлена списками вузлів та наявних дуг

[5] в існуючих локаційних моделях є ще вимога бінарного (0/1) типу змінних, і тоді модель нелінійна, типу MILP (Mixed Integer Linear Programming), використовує алгоритм переборного типу

[6] Excel підтримує наявність паралельних дуг між парами вузлів з різними напрямками і вагами

— 16 вузлів-стоків (p1 … p16),), їхні потенціали (діапазон D9:D24);

— 35 проміжних вузлів (1 … 35),), їхні потенціали (діапазон D25:D59) та 169 дуг між ними, діапазон (I3:L172).

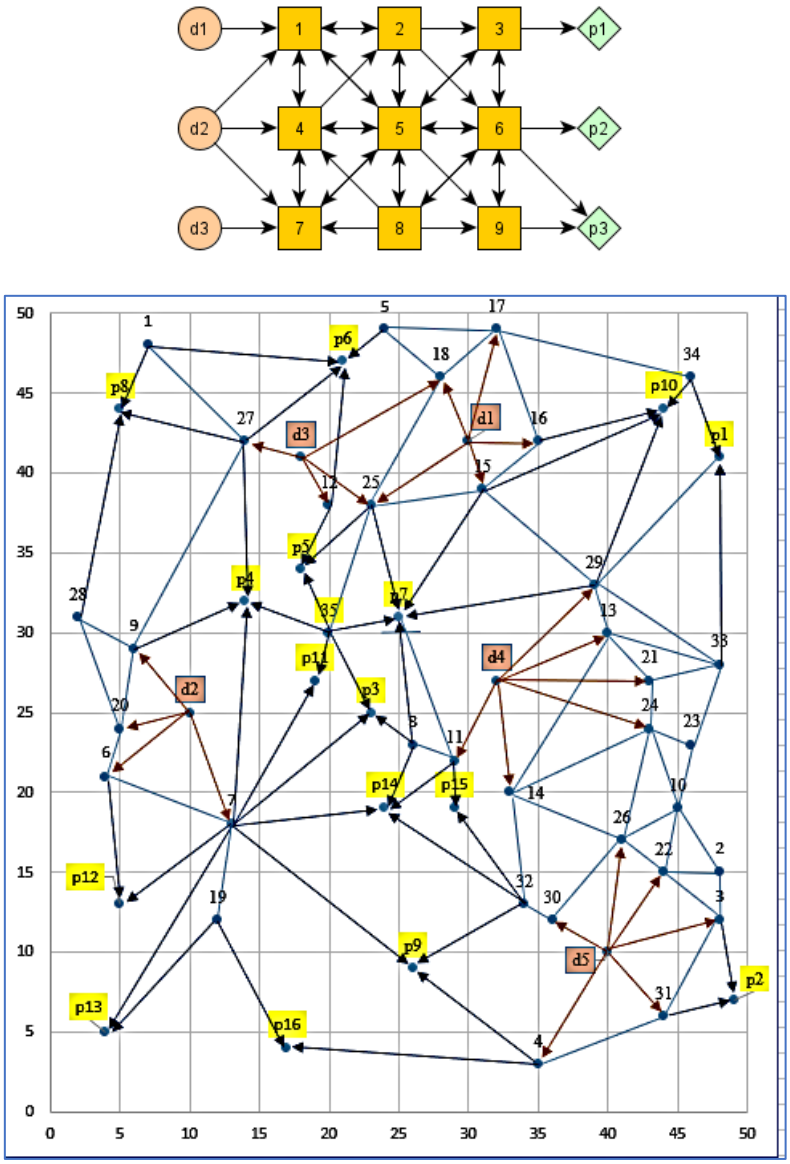


Рис. 1. Схема змішаної мережі та її вигляд

Мета: визначити дугові потоки продукту «джерела – ПП – стоки» для забезпечення попиту клієнтів за мінімальними транспортними/часовими витратами.

Входи: потенціали: вузлів П(джерела), стоків П(стоки), проміжних пунктів П(ПП), вага (питомі витрати) дуг $V = \{v(n, к)\}$, n, $к$ — початок/кінець дуги.

Задача збалансована: Пропозиції = Попит = 1000 од.

Математична модель

Змінні рішень: $X = \{x_i\}$, $i = 1 \ldots 169$, діапазон (L3:L172);

ЦФ: $VX \to \min$
Обмеження:
SUM($F_{вих}$) = П(джерела),
SUM($F_{вх}$) = П(стоки),
SUM($F_{вих}$)-SUM($F_{вх}$) = П(ПП),
$X \geq 0$.
Результат (рис. 2).

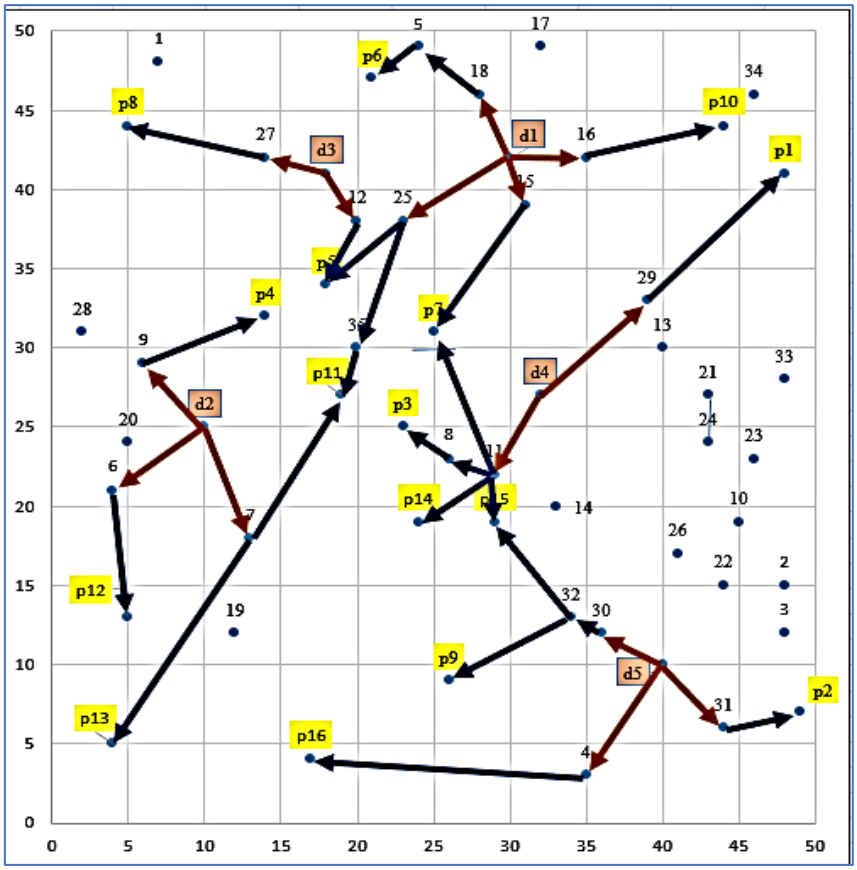


Рис. 2. МТЗ: розподіл потоків «джерела-ПП-стоки»

Аналіз результату

Пряма задача:

38 дуг мають ненульові значення, ЦФ = 15349,69 гр. од.

Аналіз чутливості (двоїста задача)

Тіньова ціна 18 проміжних пунктів менше нуля, їхні позиції — потенційні місця розміщення нових джерел, лідери: 35 (–10,5), 30 (–9,9), 1 (–9,1).

Основний матеріал

Суть цього дослідження — кількісне моделювання надзвичайної ситуації, коли наслідком послідовних і хаотичних зовнішніх впливів (атак) є поступове зниження аж до ліквідації/релокації потенціалів існуючих джерел ресурсів, які спожи-

ваються клієнтами згідно заданого попиту, щоразу доводячи систему розподілу обмежених ресурсів до стану дисбалансу.

Виходом із такої ситуації є:

— релокація/компенсація заданих/втрачених потенціалів існуючих джерел;

— визначення розрахунками локації нових джерел (серверів) у позиціях проміжних пунктів і їхніх потенціалів;

— прив'язка (призначення) клієнтів до відповідних серверів;

— оновлення змішаних потоків від існуючих і нових джерел до стоків.

Для локаційної аналітики модель нестандартна, бо зазвичай учасників локаційної задачі двоє: вузли-кандидати серверів і вузли-клієнти, у цій моделі приймають участь існуючі вузли-джерела, які разом з новими джерелами генерують і поставляють клієнтам за їхнім сталим попитом змінювані обсяги ресурсів для забезпечення балансу.

Модель має дворівневу (двозадачну) організацію розв'язку модифікованої лінійної задачі МТЗ[7], на кожному кроці циклу (його довжина залежить від параметрів моделі): внутрішня задача (зі своїми змінними і обмеженнями) генерує поточний набір входів для формування обмежень зовнішньої задачі, в яку вони передаються (теж зі своїми змінними і обмеженнями) для отримання поточного оптимуму, процес реалізується швидким і точним симплекс-методом.

Отже, попередньо збудована статична модель МТЗ за цим підходом реалізує динамічну послідовність сценаріїв, за кожним сценарієм на кожному кроці обчислювального процесу за кожною зміною значень впливаючого входу (як-от потенціалу існуючого джерела) визначається дефіцит ресурсу, для його покриття формується відповідний результат: кількість, локація та потенціали нових об'єктів (джерел), оновлені потоки та прив'язка клієнтів до відповідних серверів. За налаштуванням Solver'а можна отримати покроковий протокол для сценарного аналізу.

Задача: Чи можна зміною значень потенціалів джерел знизити транспортні витрати?

Підхід: діапазон, що містить раніше задані потенціали існуючих джерел, тепер визначено набором шуканих змінних внутрішньої задачі (Y), додано до набору шуканих потоків (X).

Дії: додати обмеження: сума змінних (Y) = сума попиту, додано до обмежень для вузлів.

Таблична модель складається із: заданої ЦФ для задачі МТЗ і двох наборів шуканих змінних (X, Y) і обмежень для них.

Результат.

ЦФ = 14510,25 гр. од., система розподілу ресурсів структурована, складається із виокремлених зон обслуговування груп клієнтів кожним джерелом (рис. 3).

[7] клас задач BLPP (Bilevel Linear Programming Problem) [7]

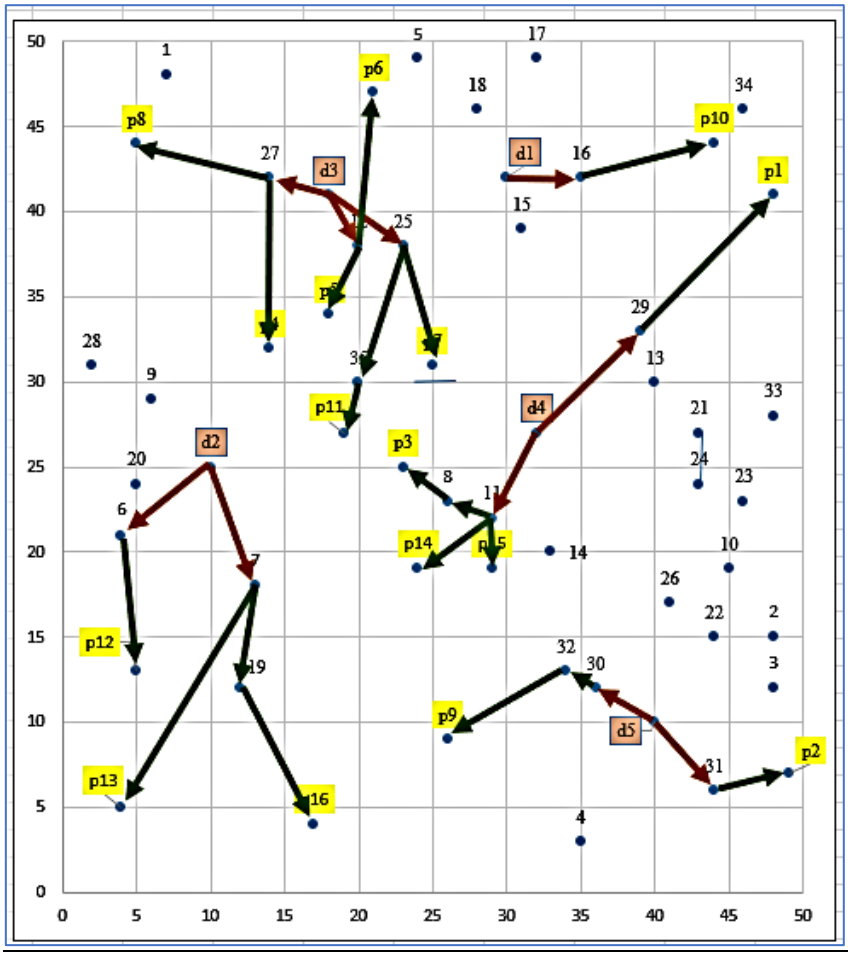


Рис. 3. МТЗ: оновлений розподіл потоків від існуючих джерел до стоків

Транспортна задача локації-релокації джерел

Простір локації нових джерел — підмножина 35 проміжних вузлів мережі, оскільки критерієм оптимізаційної задачі є мінімум транспортних витрат, неявно і цілком логічно обґрунтовується, що ця модель одночасно визначає й мінімальну кількість нових джерел для покриття дефіциту ресурсу, необхідного для задоволення попиту, діючи «розумно»: нові джерела «туляться» до ближчих клієнтів, якомога зменшуючи відстані, а зменшення їхнього числа досягається якомога більшим значенням набутих потенціалів.

Дії: попередньо визначений діапазон потенціалів проміжних пунктів тепер є набором шуканих змінних внутрішньої задачі (Y); додати обмеження: сума потоків існуючих і нових джерел дорівнює сумі попиту.

У наступних прикладах існуючі джерела послідовно виводяться з експлуатації, дисбаланс зростає, для його компенсації релокацією дефіциту здійснюється операція location-allocation для нових джерел і клієнтів, потокова конфігурація системи розподілу ресурсу оновлюється.

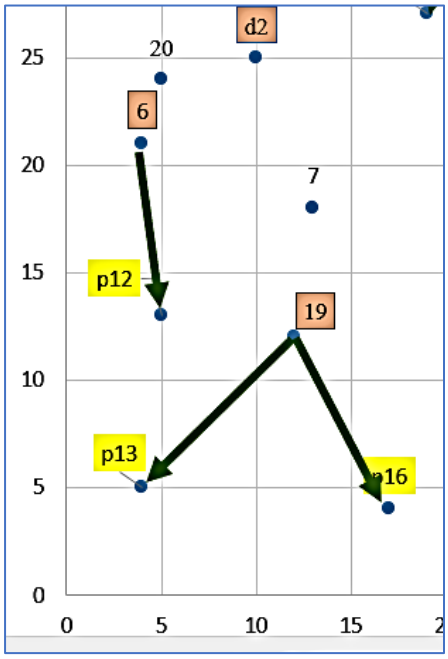
Початкове значення ЦФ = **14510,25**.

Приклад 1.

Релоковано джерело d1 (потенціал 50), дії: у клітинці D4 = 0.

Результат

Нове джерело в позиції ПП **34**, розташований поруч клієнта p10, новий потік: X(34, p10) = = 50, ЦФ = **13940,69**.



Приклад 2.

Релоковано джерело d2 (потенціал 220), дії: в клітинці D5 = 0.

Результат показано на рисунку.

Додано 2 нових джерела:

— у позиції ПП **6**, розташований поруч клієнта p12, новий потік X(6, p12) = 45;

— у позиції ПП **19**, розташований біля клієнтів p13 та p16, нові потоки: X(19, p13) = 50 та X(19, p6) = 125. ЦФ = **11264.02**.

Приклад 3.

Релоковано джерело d3 (потенціал 340), дії: у клітинці D6 = 0.

Результат

Додано 4 нових джерела:

— у позиції ПП **1**, розташований поруч клієнта p8. Новий потік X(1, p8) = 73;

— у позиції ПП **5**, розташований поруч клієнта p6. Новий потік X(5, p6) = 50;

— у позиції ПП **12**, розташований поруч клієнта p5. Новий потік X(12, p5) = = 67;

— у позиції ПП **35**, розташований між клієнтів p4, p7, p11.

Нові потоки: X(35, p4) = 50; X(35, p7) = 39; X(35, p11) = 50.

Новий вузол 34 має оновлений потік X(34, p1) = 11, сума 340 од. ЦФ = **8354,61.**

Приклад 4.

Релоковано джерело d4 (потенціал 244), дії: в клітинці D7 = 0.

Результат

Додано 2 нових джерела:

— у позиції ПП **8**, розташований між клієнтами p3 та p14.

Нові потоки: X(8, p3) = 12; X(8, p14) = 54;

— у позиції ПП **11**, розташований поруч клієнта p15. Новий потік: X(11, p15) = 167.

Вузол 35 підсилив потік X(34, p7) = 50 (був 39), сума 244 од. ЦФ = **6768,29.**

Приклад 5.

Релоковано джерело d5 (потенціал 146), дії: в клітинці D8 = 0.

Результат

Додано 2 нових джерела:

— у позиції ПП **3**, розташований поруч клієнта p2. Новий потік: X(3, p2) = 23;

— у позиції ПП **32**, розташований поруч клієнта p9. Новий потік: X(32, p9) = = 123.

ЦФ = **5813,07** (рис. 4).

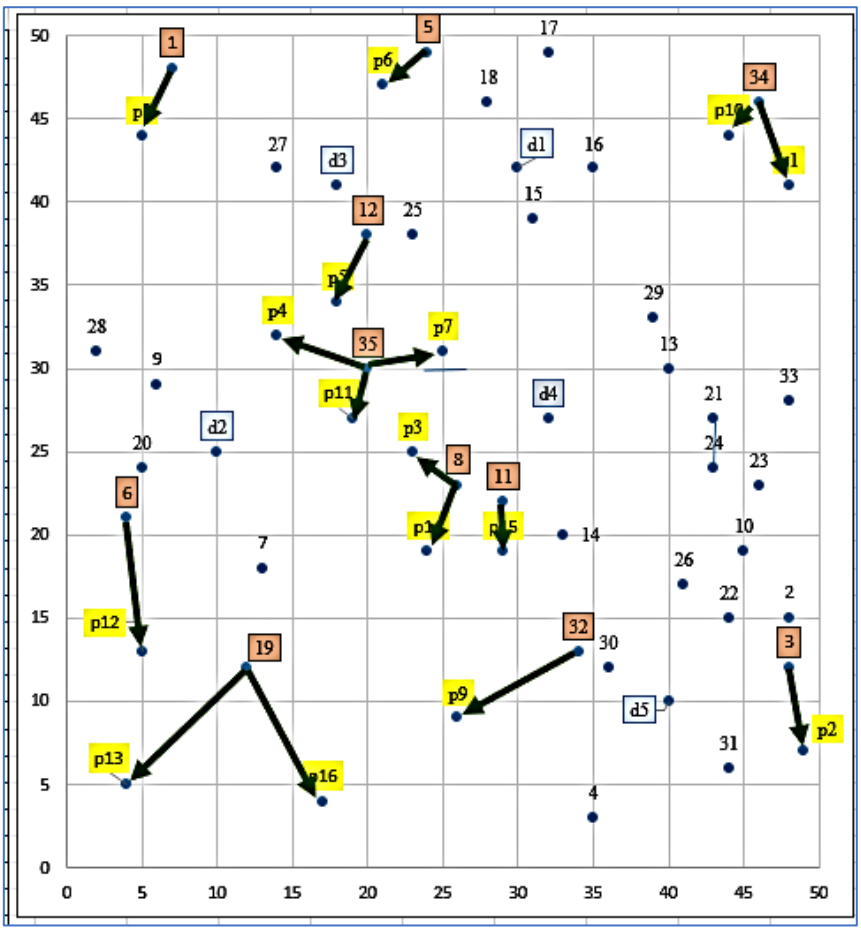


Рис. 4. Повна компенсація/релокація потенціалів ресурсу існуючих джерел

Аналіз результатів

11 нових джерел отриманими потенціалами замінили/компенсували потенціали 5 існуючих джерел, ЦФ зменшила значення зі 14510 до 5813 гр. од. Модифікація моделі з метою адаптації до реальних умов складається із перегляду значень змінних (X, Y) оптимального плану уведенням додаткових обмежень як-от: заборона, корегування, призначення, комбінація значень тощо, із розумінням зростання транспортних витрат.

3-продуктова мережева транспортна задача

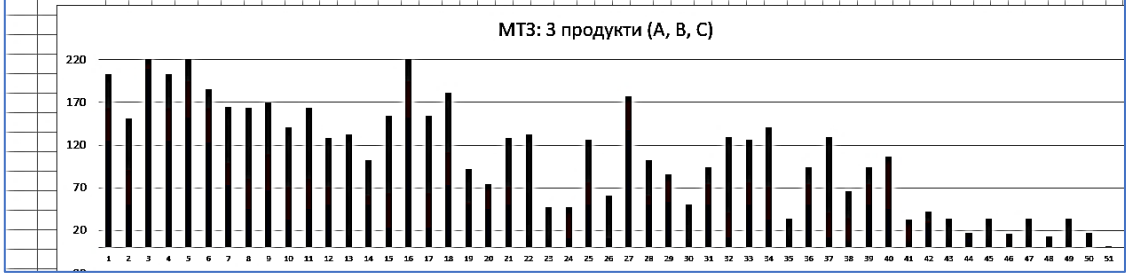
Приклад 6.

Однопродуктова модель МТЗ може бути використана для роботи із *p* різними ресурсами, якщо *p* = 3, значить, таблична модель містить по 3 стовпці: обмежень і потенціалів для вузлів і потоків для дуг. Модель розташована на одному робочому

аркуші, розмір задачі: 612 змінних і 168 обмежень, використана надбудова OpenSolver.

Отримано такий результат.

ЦФ	38942,4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
	Поч	4	7	d4	d5	d5	32	27	6	d2	25	d2	9	32	16	d5	30	31	d3	d1	15	d2	14	29	29	12	d4	11	d1	11	11	18	8	d3	35	33	d1	11	d3	5	d1	15	32	d5	7	23	27	26	32	10	25	19	7
	Кін	p16	p13	11	4	30	p9	p8	p12	7	35	6	p4	14	p10	31	32	p2	27	25	p7	9	11	p10	p1	p5	29	p15	16	p14	p7	5	p3	12	p11	p1	18	8	25	p6	15	29	p15	26	p11	33	p4	10	p14	23	p5	p16	19
	Потік А	125	50	209	125	152	123	73	45	67	33	45	50	0	50	23	152	23	73	50	45	50	0	0	11	50	11	138	50	54	5	50	12	50	33	0	50	12	0	50	45	0	29	0	17	0	0	0	0	0	17	0	0
	Потік В	39	41	100	39	43	41	26	36	43	38	36	21	0	11	41	43	41	39	3	29	21	0	0	33	26	0	39	11	32	0	24	29	26	38	0	24	29	35	24	62	33	2	0	0	0	13	0	0	0	0	2	2
	Потік С	39	60	0	39	179	22	66	83	60	70	83	57	133	41	90	179	90	69	39	0	57	133	47	3	50	50	0	41	0	45	20	88	50	70	34	20	88	31	20	0	0	11	34	0	34	3	34	13	34	0	0	0



3-продуктова транспортна задача локації-релокації джерел

Приклад 7.

Релоковано джерело *d*1 з потенціалами: А (195), В (100), С (100).

Результат

Додано 5 нових джерел у позиціях ПП: 1, 5, 19, 34 та 35, які розташовані поруч із клієнтами: p1, p6, p8, з10, p11, p13 та p16, відповідно. Потоками від них частково чи повністю задоволено попит цих клієнтів, ЦФ = 33645,83.

Висновки

Розроблено лінійну оптимізаційну модель на основі розв’язання мережевої транспортної задачі, яка в локаційній постановці щодо розміщення нових джерел для компенсації дефіциту ресурсу для покриття попиту клієнтів визначає їхнє мінімальне число, дискретне розміщення (у вузлах мережі) і потенціали разом з оновленими маршрутами від джерел до клієнтів. Модель досить просто реалізує додаткові завдання (як-от багатопродуктову постановку для розподілу потоків різних ресурсів у транспортних коридорах), додавання обмежень (знизу/зверху) на значення шуканих змінних для її адаптації до реальних умов. Тип оптимізаційної моделі дозволяє наявними доступними інструментальними засобами реалізувати розв’язки досить крупних задач. Зокрема доведено, що в умовах релокації джерел/потенціалів мінімальне число нових джерел завжди розміщуються поруч/між вузлів клієнтів згідно визначеного критерію мінімізації транспортних витрат. Модель призначена для балансування розподільчої системи для повного задоволення попиту клієнтів в умовах дисбалансу.

1. Agadaga G. Transshipment Problem and Its Variants: A Review. Math. Th. And Model., 2017. P. 19–32

2. Brusco M., Stahl S. Linear and Nonlinear Optimization Using Spreadsheets. Examples for Prescriptive, Predictive and Descriptive Analysis. Worls Sci., 2025. 359 p.

3. Cooper L. The Transportation-Allocation Problem. OR, INFORMS. 1972. P. 94–108.
4. Daskin M. Network and Discrete Location. Models, Algorithms and Applications, 2-ed. Wiley, 2013. 535 p.
5. Eiselt H., Marianov V. Foundations of Location Analysis. Springer, 2011. 524 p.
6. Eiselt H., Marianov V. Applications of Location Analysis. Springer, 2015. 440 p.
7. Floudas C., Pardalos P. Encyclopedia of Optimization, 2-ed. Springer, 2009. 4646 p.
8. Haitao Li. Optimization Modeling for Supply Chain Applications. World Sci., 2023. 469 p.
9. Laporte G. et al. Location Science, 2-ed. Springer, 2019. 767 p.
10. Prokop D. Transportation Operations Management. Elsevier, 2022. 242 p.
11. Ragsdale C. Spreadsheet Modeling and Decision Analysis. A Practical Introduction to Business Analytics, 9-ed. Cengage, 2022. 908 p.
12. Wen-Chen Lee, Neng-Shu Yang. Locations Problems Solving by Spreadsheets/Wseas Trans. on Business and Econ., 2009. P. 469–480.
13. Кузьмичов А.І. Оптимізаційне моделювання в MS Excel. Практикум, 2-ред. Київ: ІПРІ НАНУ, 2017. 438 с.
14. Кузьмичов А.І. Організація транспортних маршрутів у задачах зберігання, розподілу та постачання ресурсів за оптимізаційною моделлю MILP. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2023, Т. 25, № 2. С. 99–107. https://doi.org/10.35681/1560-9189.2023.25.2.300773.
15. Кузьмичов А.І. Мережеве моделювання розкладу проєктної програми за підходом Systems Engineering. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2025, Т. 27, № 1. С. 64–76. https://doi.org/10.35681/1560-9189.2025.27.1.335709.

Надійшла до редакції 25.08.2025