УДК 004.942

Ю. Е. Бояринова, Н. А. Городько
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Построение высокоразмерных изоморфных гиперкомплексных числовых систем

Рассмотрены некоторые вопросы построения изоморфных гиперкомплексных числовых систем (ГЧС) с помощью оператора умножения размерности. Получены таблицы умножения высокоразмерных ГЧС и операторы изоморфизмов.

Ключевые слова: *гиперкомплексная числовая система, изоморфизм, оператор умножения размерностей.*

Введение

Существует ряд методов построения гиперкомплексных числовых систем (ГЧС) [1–3], с помощью которых можно построить большое количество ГЧС [4, 5]. Получать новые ГЧС можно путем перечисления таблиц умножения заданной размерности, переходом от бесконечномерных гиперкомплексных числовых систем к ГЧС, процедурой удвоения ГЧС [6], а также процедурой умножения размерности ГЧС [7].

Особое место среди них занимают изоморфные сильно- и слобозаполненные ГЧС. Интерес к таким парам связан с использованием ГЧС в математическом моделировании. Для создания математических моделей с помощью гиперкомплексных числовых систем, как правило, нужны сильнозаполненные ГЧС, но при вычислениях с моделью удобнее использовать слабозаполненные, в которых значительно сокращается количество операций над числами.

Алгоритм построения изоморфных пар ГЧС

Процедура умножения размерности ГЧС предполагает увеличение размерности одной ГЧС за счет представления ее компонент элементами другой ГЧС:

$$Д(Г_1(e,n),Г_2(f,m)) = Г_3(ef,nm),$$

где $\Gamma_1(e,n)$, $\Gamma_2(f,2)$, $\Gamma_3(ef,nm)$ — гиперкомплексные числовые системы с базисами $\{e\}$, $\{f\}$ и $\{ef\}$ соответственно и размерностями n,m,nm; $Д(\Gamma_1(e,n)$, $\Gamma_2(f,2))$ — оператор умножения размерности ГЧС $\Gamma_1(e,n)$ системой $\Gamma_2(f,2)$.

Свойства оператора умножения размерности представлены в работе [4], основные результаты которой, необходимые для дальнейшего изложения, следующие.

Теорема 1. Если:

1) $\Gamma_1(e,n)$ и $\Gamma_2(f,m)$ коммутативны,

2) $e_i f_j = f_j e_i$, $\forall i = 1,...,n; \forall j = 1,...,m$,

тогда

$$Д(Г_1(e,n), Г_2(f,m)) \simeq Д(Г_2(f,m), Г_1(e,n)),$$

причем изоморфизм устанавливается перестановкой строк и столбцов таблиц умножения.

Теорема 2. Пусть $Г_2(f,m) \simeq Г_3(g,m)$.

Тогда

$$Д(Г_1(e,n), Г_2(f,m)) \simeq Д(Г_1(e,n), Г_3(g,m)),$$

т.е. умножение размерности одной и той же ГЧС изоморфными ГЧС приводит к изоморфным ГЧС.

Теорема 3. Пусть $Г_1(e,n) \simeq Г_3(f,n)$ и $Г_2(g,m) \simeq Г_4(h,m)$, $e = L_1 g$, $f = L_2 h$.

Тогда

$$Д(\Gamma_1(e,n), \Gamma_2(f,m)) = Г_5(ef, mn) \simeq Г_6(gh, mn) = Д(\Gamma_3(g,n), \Gamma_4(h,m)),$$

и существует невырожденное линейное преобразование, переводящее базис $\{ef\}$ в базис $\{gh\}$.

Исходя из вышесказанного, можно сформулировать основные этапы алгоритма построения изоморфных пар сильно- и слабозаполненных ГЧС.

1. Построение таблиц умножения на основе блочных таблиц умножения.
2. Построение подробной таблицы умножения.
3. Построение оператора изоморфизма между ГЧС. (До этого этапа базисы ГЧС имели многосимвольное обозначение).
4. Переход от многосимвольного обозначения к односимвольному.

Построение пар изоморфных ГЧС с помощью оператора умноження размерности

1. $Д(T(e,3), T(g,3)) \simeq Д(\mathrm{R} \oplus \mathrm{C}(f,3), R \oplus C(h,3))$.

Пусть:

$Г_1(e,3) = T(e,3) \simeq R \oplus C(f,3) = Г_3(f,3)$ и $Г_2(g,3) = T(g,3) \simeq R \oplus C(h,3) = Г_4(h,3)$.

T	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	$(e_3 - e_1)/2$	$-e_2$
e_3	e_3	$-e_2$	e_1

$R \oplus C$	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	0	0
f_2	0	f_2	f_3
f_3	0	f_3	$-f_2$

Как было показано в [1, 2], оператор изоморфизма L_1 между $T(e,3)$ и $R \oplus C(f,3)$

$$T(e,3) \underset{L_1^{-1}}{\overset{L_1}{\Leftrightarrow}} R \oplus C(f,3)$$

имеет вид:

$$L_1 = \begin{cases} e_1 = f_1 + f_2, \\ e_2 = \pm f_3, \\ e_3 = f_1 - f_2, \end{cases} \qquad L_1^{-1} = \begin{cases} f_1 = (e_1 + e_3)/2, \\ f_2 = (e_1 - e_3)/2, \\ f_3 = \pm e_2. \end{cases} \qquad (1)$$

Оператор изоморфизма L_2 между $T(g,3)$ и $R \oplus C(h,3)$

$$T(g,3) \underset{L_2^{-1}}{\overset{L_2}{\Leftrightarrow}} R \oplus C(h,3)$$

имеет такой же вид, как (1) только с базисами $\{g\}$ и $\{h\}$.

Применим процедуру умножения размерности к системам Γ_1 и Γ_2^

$$Д(\Gamma_1(e,3), \Gamma_2(g,3)) = \Gamma_5(eg,9)$$

и к системам Γ_3 и Γ_4:

$$Д(\Gamma_3(f,3), \Gamma_4(h,3)) = \Gamma_6(fh,9)\ .$$

На основании теорем 2 и 3 системы Γ_5 и Γ_6 изоморфны. Построим их таблицы умножения на основе блочных таблиц умножения [4].

Для системы $Г_5(eg,9)$:

<table>
<tr><td>$Г_5(eg,9)$</td><td>e_1g_1</td><td>e_1g_2</td><td>e_1g_3</td><td>e_2g_1</td><td>e_2g_2</td><td>e_2g_3</td><td>e_3g_1</td><td>e_3g_2</td><td>e_3g_3</td></tr>
<tr><td>e_1g_1</td><td colspan="3" rowspan="3">$e_1e_1\Gamma_2$</td><td colspan="3" rowspan="3">$e_1e_2\Gamma_2$</td><td colspan="3" rowspan="3">$e_1e_3\Gamma_2$</td></tr>
<tr><td>e_1g_2</td></tr>
<tr><td>e_1g_3</td></tr>
<tr><td>e_2g_1</td><td colspan="3" rowspan="3">$e_1e_2\Gamma_2$</td><td colspan="3" rowspan="3">$e_2e_2\Gamma_2$</td><td colspan="3" rowspan="3">$e_2e_3\Gamma_2$</td></tr>
<tr><td>e_2g_2</td></tr>
<tr><td>e_2g_3</td></tr>
<tr><td>e_3g_1</td><td colspan="3" rowspan="3">$e_1e_3\Gamma_2$</td><td colspan="3" rowspan="3">$e_2e_3\Gamma_2$</td><td colspan="3" rowspan="3">$e_3e_3\Gamma_2$</td></tr>
<tr><td>e_3g_2</td></tr>
<tr><td>e_3g_3</td></tr>
</table>

а для системы $Г_6(fh,9)$:

$\Gamma_6(fh,9)$	f_1h_1	f_1h_2	f_1h_3	f_2h_1	f_2h_2	f_2h_3	f_3h_1	f_3h_2	f_3g_3
f_1h_1									
f_1h_2	$f_1f_1\Gamma_4$			$f_1f_2\Gamma_4$			$f_1f_3\Gamma_4$		
f_1h_3									
f_2h_1									
f_2h_2	$f_1f_2\Gamma_4$			$f_2f_2\Gamma_4$			$f_2f_3\Gamma_4$		
f_2h_3									
f_3h_1									
f_3h_2	$f_1f_3\Gamma_4$			$f_2f_3\Gamma_4$			$f_3f_3\Gamma_4$		
f_3g_3									

В подробном виде эти таблицы умножения будут иметь вид:

$\Gamma_5(eg,9)$	e_1g_1	e_1g_2	e_1g_3	e_2g_1	e_2g_2	e_2g_3	e_3g_1	e_3g_2	e_3g_3
e_1g_1	e_1g_1	e_1g_2	e_1g_3	e_2g_1	e_2g_2	e_2g_3	e_3g_1	e_3g_2	e_3g_3
e_1g_2	e_1g_2	$e_1\frac{g_3-g_1}{2}$	$-e_1g_2$	e_2g_2	$e_2\frac{g_3-g_1}{2}$	$-e_2g_2$	e_3g_2	$e_3\frac{g_3-g_1}{2}$	$-e_3g_2$
e_1g_3	e_1g_3	$-e_1g_2$	e_1g_1	e_2g_3	$-e_2g_2$	$-e_2g_1$	e_3g_3	$-e_3g_2$	$-e_3g_1$
e_2g_1	e_2g_1	e_2g_2	e_2g_3	$\frac{e_3-e_1}{2}g_1$	$\frac{e_3-e_1}{2}g_2$	$\frac{e_3-e_1}{2}g_3$	$-e_2g_1$	$-e_2g_2$	e_2g_3
e_2g_2	e_2g_2	$e_2\frac{g_3-g_1}{2}$	$-e_2g_2$	$\frac{e_3-e_1}{2}g_2$	$\frac{(e_3-e_1)(g_3-g_1)}{4}$	$-\frac{e_3-e_1}{2}g$	$-e_2g_2$	$-e_2\frac{g_3-g_1}{2}$	e_2g_2
e_2g_3	e_2g_3	$-e_2g_2$	$-e_2g_1$	$\frac{e_3-e_1}{2}g_3$	$-\frac{e_3-e_1}{2}g_2$	$\frac{e_3-e_1}{2}g_1$	$-e_2g_3$	e_2g_2	e_2g_1
e_3g_1	e_3g_1	e_3g_2	e_3g_3	$-e_2g_1$	$-e_2g_2$	e_2g_3	e_1g_1	e_1g_2	e_1g_3
e_3g_2	e_3g_2	$e_3\frac{g_3-g_1}{2}$	$-e_3g_2$	$-e_2g_2$	$-e_2\frac{g_3-g_1}{2}$	e_2g_2	e_1g_2	$e_1\frac{g_3-g_1}{2}$	$-e_1g_2$
e_3g_3	e_3g_3	$-e_3g_2$	$-e_3g_1$	$-e_2g_3$	e_2g_2	e_2g_1	e_1g_3	$-e_1g_2$	e_1g_1

$\Gamma_6(fh,9)$	f_1h_1	f_1h_2	f_1h_3	f_2h_1	f_2h_2	f_2h_3	f_3h_1	f_3h_2	f_3h_3
f_1h_1	f_1h_1	0		0	0	0	0	0	0
f_1h_2	0	f_1h_2	f_1h_3	0	0	0	0	0	0
f_1h_3	0	f_1h_3	$-f_1h_2$		0	0	0	0	0
f_2h_1	0	0		f_2h_1	0	0	0		
f_2h_2					f_2h_2	f_2h_3	0	0	0
f_2h_3					f_2h_3	$-f_2h_2$	0	0	0
f_3h_1							f_3h_1		
f_3h_2								f_3h_2	f_3h_3
f_3h_3								f_3h_3	$-f_3h_2$

Система $\Gamma_5(eg,9)$ — сильнозаполненная, а система $\Gamma_6(fh,9)$ — слабо. В то же время они изоморфны, как это следует из теорем 1 и 2.

Построим линейное преобразование, связывающее базисы $\{eg\}$ и $\{fh\}$ в соответствии с теоремой 2 и учетом преобразования L_1 в (1):

$$\begin{aligned}
&e_1g_1 = (f_1 + f_2)(h_1 + h_2) = f_1h_1 + f_1h_2 + f_2h_1 + f_2h_2,\\
&e_1g_2 = (f_1 + f_2)(\pm h_3) = \pm\,(f_1h_3 + f_2h_3),\\
&e_1g_3 = (f_1 + f_2)(h_1 - h_2) = f_1h_1 - f_1h_2 + f_2h_1 - f_2h_2,\\
&e_2g_1 = (\pm f_3)(h_1 + h_2) = \pm\,(f_3h_1 + f_3h_2),\\
&e_2g_2 = (\pm f_3)(\pm h_3) = \pm\,(f_3h_3),\\
&e_2g_3 = (\pm f_3)(h_1 - h_2) = \pm\,(f_3h_1 - f_3h_2),\\
&e_3g_1 = (f_1 - f_2)(h_1 + h_2) = f_1h_1 + f_1h_2 - f_2h_1 - f_2h_2,\\
&e_3g_2 = (f_1 - f_2)(\pm h_3) = \pm\,(f_1h_3 - f_2h_3),\\
&e_3g_3 = (f_1 - f_2)(h_1 - h_2) = f_1h_1 - f_1h_2 - f_2h_1 + f_2h_2.
\end{aligned}\tag{2}$$

Обратное преобразование, которое построено по обратным преобразованиям L_2 (1), имеет вид:

$$\begin{aligned}
&f_1h_1 = \frac{1}{4}(e_1 + e_3)(g_1 + g_3) = \frac{1}{4}(e_1g_1 + e_1g_3 + e_3g_1 + e_3g_3),\\
&f_1h_2 = \frac{1}{4}(e_1 + e_3)(g_1 - g_3) = \frac{1}{4}(e_1g_1 - e_1g_3 + e_3g_1 - e_3g_3),\\
&f_1h_3 = \frac{1}{2}(e_1 + e_3)(\pm g_2) = \pm\frac{1}{2}(e_1g_2 + e_3g_2),\\
&f_2h_1 = \frac{1}{4}(e_1 - e_3)(g_1 + g_3) = \frac{1}{4}(e_1g_1 + e_1g_3 - e_3g_1 - e_3g_3),\\
&f_2h_2 = \frac{1}{4}(e_1 - e_3)(g_1 - g_3) = \frac{1}{4}(e_1g_1 - e_1g_3 - e_3g_1 + e_3g_3),\\
&f_2h_3 = \frac{1}{2}(e_1 - e_3)(\pm g_2) = \pm\frac{1}{2}(e_1g_2 - e_3g_2),\\
&f_3h_1 = \frac{1}{2}(\pm e_2)(g_1 + g_3) = \pm\frac{1}{2}(e_2g_1 + e_2g_3),\\
&f_3h_2 = \frac{1}{2}(\pm e_2)(g_1 - g_3) = \pm\frac{1}{2}(e_2g_1 - e_2g_3),\\
&f_3h_1 = (\pm e_2)(\pm g_2) = \pm\,(e_2g_2).
\end{aligned}\tag{3}$$

Многосимвольные обозначения переобозначаются в односимвольные по законам

$$m_k = e_{\left[\frac{k-1}{n}\right]+1} g_{((k-1) \bmod n)+1}, \tag{4}$$

и соответственно

$$M_k = f_{\left[\frac{k-1}{n}\right]+1} h_{((k-1) \bmod n)+1}, \text{ где } n = 3, k = 1 \ldots n * n. \tag{5}$$

Таким образом, получаются обычные обозначения элементов базиса.

Тогда таблицы умножения для систем $\Gamma_5(m,9)$ и $\Gamma_6(M,9)$ и линейные преобразования (2), (3) будут иметь привычный вид:

$\Gamma_5(m,9)$	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9
m_1	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9
m_2	m_2	$\frac{1}{2}(m_3 - m_1)$	$-m_2$	m_5	$\frac{1}{2}(m_6 - m_4)$	$-m_5$	m_8	$\frac{1}{2}(m_9 - m_7)$	$-m_8$
m_3	m_3	$-m_2$	m_1	m_6	$-m_5$	m_4	m_9	$-m_8$	m_7
m_4	m_4	$-m_3$	$-m_2$	$\frac{1}{2}(m_7 - m_1)$	$\frac{1}{2}(m_8 - m_2)$	$\frac{1}{2}(m_9 - m_3)$	$-m_4$	$-m_5$	$-m_6$
m_5	m_5	m_6	m_7	$\frac{1}{2}(m_8 - m_2)$	$\frac{1}{4} \times$ $\times (m_9 - m_7 - m_3 + m_1)$	$-\frac{1}{2}(m_8 - m_2)$	$-m_5$	$-\frac{1}{2}(m_6 - m_4)$	m_5
m_6	m_6	$-m_5$	m_8	$\frac{1}{2}(m_9 - m_3)$	$-\frac{1}{2}(m_8 - m_2)$	$\frac{1}{2}(m_7 - m_1)$	$-m_6$	m_5	$-m_4$
m_7	m_7	m_8	m_9	$-m_4$	$-m_5$	$-m_6$	m_1	m_2	m_3
m_8	m_8	$\frac{1}{2}(m_9 - m_7)$	$-m_8$	$-m_5$	$-\frac{1}{2}(m_6 - m_4)$	m_5	m_2	$\frac{1}{2}(m_3 - m_1)$	$-m_2$
m_9	m_9	$-m_8$	m_7	$-m_6$	m_5	$-m_4$	m_3	$-m_2$	m_1

$\Gamma_6(M,9)$	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9
M_1	M_1	0	0	0	0	0	0	0	0
M_2	0	M_2	M_3	0	0	0	0	0	0
M_3	0	M_3	$-M_2$	0	0	0	0	0	0
M_4	0	0	0	M_4	0	0	0	0	0
M_5	0	0	0	0	M_5	M_6	0	0	0
M_6	0	0	0	0	M_6	$-M_5$	0	0	0
M_7	0	0	0	0	0	0	M_7	0	0
M_8	0	0	0	0	0	0	0	M_8	M_9
M_9	0	0	0	0	0	0	0	M_9	$-M_8$

Прямое преобразование:

$$m_1 = M_1 + M_2 + M_4 + M_5, \qquad m_6 = \pm(M_7 - M_8),$$
$$m_2 = \pm(M_3 + M_6), \qquad m_7 = M_1 + M_2 - M_4 - M_5,$$
$$m_3 = M_1 - M_2 + M_4 - M_5, \qquad m_8 = \pm(M_2 - M_6),$$
$$m_4 = \pm(M_7 + M_8), \qquad m_9 = M_1 - M_2 - M_4 + M_5.$$
$$m_5 = \pm(M_9),$$

Обратное преобразование:

$$M_1 = \frac{1}{4}(m_1 + m_3 + m_7 + m_9), \qquad M_6 = \pm\frac{1}{2}(m_1 + m_8),$$
$$M_2 = \frac{1}{4}(m_1 - m_3 + m_7 - m_9), \qquad M_7 = \pm\frac{1}{2}(m_4 + m_6),$$
$$M_3 = \pm\frac{1}{2}(m_2 + m_8), \qquad M_8 = \pm\frac{1}{2}(m_4 - m_6),$$
$$M_4 = \frac{1}{4}(m_1 + m_3 - m_7 - m_9), \qquad M_9 = \pm m_5.$$
$$M_5 = \frac{1}{4}(m_1 + m_3 - m_7 + m_9),$$

2. $Д(T(e,3), W(g,2)) \simeq Д(\mathrm{R} \oplus \mathrm{C}(f,3), R \oplus R(h,2))$.

Пусть $\varGamma_1(e,3) = T(e,3) \simeq C \oplus R(f,3) = \varGamma_3(f,3)$ и $\varGamma_7(g,2) = W(g,2) \simeq W_1(h,2) = = \varGamma_8(h,2)$.

Таблица умножения триплексных чисел представлена выше, а операторы изоморфизма L_1 и L_1^{-1} имеют вид (1).

Таблицы умножения двойных чисел W и системы $W_1 = R \oplus R$ имеют вид:

	g_1	g_2
g_1	g_1	g_2
g_2	g_2	g_1

	h_1	h_2
h_1	h_1	0
h_2	0	h_2

а изоморфное преобразование $W(e,2) \underset{L_3^{-1}}{\overset{L_3}{\Leftrightarrow}} R \oplus R(f,2)$:

$$L_3 = \begin{cases} e_1 = f_1 + f, \\ e_2 = f_1 - f_2, \end{cases} \quad L_3^{-1} = \begin{cases} f_1 = (e_1 + e_2)/2, \\ f_2 = (e_1 - e_2)/2. \end{cases} \tag{6}$$

Применим процедуру умножения размерности к системам Γ_1 и Γ_7:

$$Д(\Gamma_1(e,3), \Gamma_7(g,2)) = \Gamma_9(eg,6)$$

и к системам Γ_2 и Γ_8:

$$Д(\Gamma_2(f,3),\Gamma_8(h,2))=\Gamma_{10}(fh,6).$$

Выполняются аналогичные шаги построения изоморфного преобразования с учетом выражений (1) и (6), а также с учетом преобразования индексов (4), (5), получаются таблицы умножения следующего вида:

$\Gamma_9(m,6)$	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
m_1	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
m_2	m_2	m_1	m_4	m_3	m_6	m_5
m_3	m_3	m_4	$\frac{1}{2}(m_5-m_1)$	$\frac{1}{2}(m_6-m_2)$	$-m_3$	$-m_4$
m_4	m_4	m_3	$\frac{1}{2}(m_6-m_2)$	$\frac{1}{2}(m_5-m_1)$	$-m_4$	$-m_3$
m_5	m_5	m_6	$-m_3$	$-m_4$	m_1	m_2
m_6	m_6	m_5	$-m_4$	$-m_3$	m_2	m_1

и

$\Gamma_{10}(M,6)$						
	M_1	0	0	0	0	0
	0	M_2	0	0	0	0
	0	0	M_3	0	M_5	0
	0	0	0	M_4	0	M_6
	0	0	M_5	0	$-M_3$	0
	0	0	0	M_6	0	$-M_4$

и соответствующие преобразования:

1) прямое:

$$m_1=M_1+M_2+M_3+M_4, \qquad m_4=\pm(M_5-M_6),$$
$$m_2=M_1-M_2+M_3-M_4, \qquad m_5=M_1+M_2-M_3-M_4,$$
$$m_3=\pm(M_5+M_6), \qquad m_6=M_1-M_2-M_3+M_4;$$

2) обратное:

$$M_1=\frac{1}{4}(m_1+m_2+m_5+m_6), \qquad M_4=\frac{1}{4}(m_1-m_2-m_5+m_6),$$
$$M_2=\frac{1}{4}(m_1-m_2+m_5-m_6), \qquad M_5=\pm\frac{1}{2}(m_3+m_4),$$
$$M_3=\frac{1}{4}(m_1+m_2-m_5-m_6), \qquad M_6=\pm\frac{1}{2}(m_3-m_4).$$

3. $Д(K(e,4),K(g,4)) \simeq Д(C \oplus C(f,4), C \oplus C(h,4))$.

Пусть: $\varGamma_{11}(e,4) = K(e,4) \simeq C \oplus C(f,4) = \varGamma_{13}(f,4)$ и $\varGamma_{12}(g,4) = K(g,4) \simeq C \oplus C(h,4) =$ $= \varGamma_{14}(h,4)$.

Соответствующие таблицы умножения имеют вид:

K	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	e_4	e_1	e_2
e_4	e_4	$-e_3$	e_2	$-e_1$

$C \oplus C$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	0	0
f_2	f_2	$-f_1$	0	0
f_3	0	0	f_3	f_4
f_4	0	0	f_4	$-f_3$

а изоморфизм между этими ГЧС $K(e,4) \underset{L_4^{-1}}{\overset{L_4}{\Leftrightarrow}} C \oplus C(f,4)$:

$$L_4 = \begin{cases} e_1 = f_1 + f_3 \\ e_2 = -f_2 + f_4, \\ e_3 = -f_2 - f_4, \\ e_4 = -f_1 + f_3, \end{cases} \quad L_4^{-1} = \begin{cases} f_1 = (e_1 - e_4)/2, \\ f_2 = (-e_2 - e_3)/2, \\ f_3 = (e_1 + e_4)/2, \\ f_4 = (e_2 - e_3)/2. \end{cases} \tag{7}$$

Применим процедуру умножения размерности к системам Γ_{11} и Γ_{12}:

$$Д(\Gamma_{11}(e,4), \Gamma_{12}(g,4)) = \Gamma_{15}(eg,16)$$

и к системам Γ_{13} и Γ_{14}:

$$Д(\Gamma_{13}(f,4), \Gamma_{14}(h,4)) = \Gamma_{16}(fh,16).$$

На основании теорем 2 и 3 системы Γ_{15} и Γ_{16} изоморфны.

Выполняются соответствующие этапы построения пар изоморфных систем. Тогда система $\Gamma_{15}(eg,16)$ будет иметь вид, с учетом преобразования индексов (4):

$\Gamma_{15}(m,16)$	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	m_{12}	m_{13}	m_{14}	m_{15}	m_{16}
m_1	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	m_{12}	m_{13}	m_{14}	m_{15}	m_{16}
m_2	m_2	$-m_1$	m_4	$-m_3$	m_6	$-m_5$	m_8	$-m_7$	m_{10}	$-m_9$	m_{12}	$-m_{11}$	m_{14}	$-m_{13}$	m_{16}	$-m_{15}$
m_3	m_3	m_4	$-m_1$	$-m_2$	m_7	m_8	$-m_5$	$-m_6$	m_{11}	m_{12}	$-m_9$	$-m_{10}$	m_{15}	m_{16}	$-m_{13}$	$-m_{14}$
m_4	m_4	$-m_3$	$-m_2$	m_1	m_8	$-m_7$	$-m_6$	m_5	m_{12}	$-m_{11}$	$-m_{10}$	m_9	m_{16}	$-m_{15}$	$-m_{14}$	m_{13}
m_5	m_5	m_6	m_7	m_8	$-m_1$	$-m_2$	$-m_3$	$-m_4$	m_{13}	m_{14}	m_{15}	m_{16}	$-m_9$	$-m_{10}$	$-m_{11}$	$-m_{12}$
m_6	m_6	$-m_5$	m_8	$-m_7$	$-m_2$	m_1	$-m_4$	m_3	m_{14}	$-m_{13}$	m_{16}	$-m_{15}$	$-m_{10}$	m_9	$-m_{12}$	m_{11}
m_7	m_7	m_8	$-m_5$	$-m_6$	$-m_3$	$-m_4$	m_1	m_2	m_{15}	m_{16}	$-m_{13}$	$-m_{14}$	$-m_{11}$	$-m_{12}$	m_9	m_{10}
m_8	m_8	$-m_7$	$-m_6$	m_5	$-m_4$	m_3	m_2	$-m_1$	m_{16}	$-m_{15}$	$-m_{14}$	m_{13}	$-m_{12}$	m_{11}	m_{10}	$-m_9$

m_9	m_9	m_{10}	m_{11}	m_{12}	m_{13}	m_{14}	m_{15}	m_{16}	$-m_1$	$-m_2$	$-m_3$	$-m_4$	$-m_5$	$-m_6$	$-m_7$	$-m_8$
m_{10}	m_{10}	$-m_9$	m_{12}	$-m_{11}$	m_{14}	$-m_{13}$	m_{16}	$-m_{15}$	$-m_2$	m_1	$-m_4$	m_3	$-m_6$	m_5	$-m_8$	m_7
m_{11}	m_{11}	m_{12}	$-m_9$	$-m_{10}$	m_{15}	m_{16}	$-m_{13}$	$-m_{14}$	$-m_3$	$-m_4$	m_1	m_2	$-m_7$	$-m_8$	m_5	m_6
m_{12}	m_{12}	$-m_{11}$	$-m_{10}$	m_9	m_{16}	$-m_{15}$	$-m_{14}$	m_{13}	$-m_4$	m_3	m_2	$-m_1$	$-m_8$	m_7	m_6	$-m_5$
m_{13}	m_{13}	m_{14}	m_{15}	m_{16}	$-m_9$	$-m_{10}$	$-m_{11}$	$-m_{12}$	$-m_5$	$-m_6$	$-m_7$	$-m_8$	m_1	m_2	m_3	m_4
m_{14}	m_{14}	$-m_{13}$	m_{16}	$-m_{15}$	$-m_{10}$	m_9	$-m_{12}$	m_{11}	$-m_6$	m_5	$-m_8$	m_7	m_2	$-m_1$	m_4	$-m_3$
m_{15}	m_{15}	m_{16}	$-m_{13}$	$-m_{14}$	$-m_{11}$	$-m_{12}$	m_9	m_{10}	$-m_7$	$-m_8$	m_5	m_6	m_3	m_4	$-m_1$	$-m_2$
m_{16}	m_{16}	$-m_{15}$	$-m_{14}$	m_{13}	$-m_{12}$	m_{11}	m_{10}	$-m_9$	$-m_8$	m_7	m_6	$-m_5$	m_4	$-m_3$	$-m_2$	m_1

а система $\Gamma_{16}(M,16)$:

$\Gamma_{16}(M,16)$	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}	M_{16}
M_1	M_1	M_2	0	0	M_5	M_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M_2	M_2	$-M_1$	0	0	M_6	$-M_5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M_3	0	0	M_3	M_4	0	0	M_7	M_8	0	0	0	0	0	0	0	0
M_4	0	0	M_4	$-M_3$	0	0	M_8	$-M_7$	0	0	0	0	0	0	0	0
M_5	M_5	M_6	0	0	$-M_1$	$-M_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M_6	M_6	$-M_5$	0	0	$-M_2$	M_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M_7	0	0	M_7	M_8	0	0	$-M_3$	$-M_4$	0	0	0	0	0	0	0	0
M_8	0	0	M_8	$-M_7$	0	0	$-M_4$	M_3	0	0	0	0	0	0	0	0
M_9	0	0	0	0	0	0	0	0	M_9	M_{10}	0	0	M_{13}	M_{14}	0	0
M_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	M_{10}	$-M_9$	0	0	M_{14}	$-M_{13}$	0	0
M_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	M_{11}	M_{12}	0	0	M_{15}	M_{16}
M_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	M_{12}	$-M_{11}$	0	0	M_{16}	$-M_{15}$
M_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	M_{13}	M_{14}	0	0	$-M_9$	$-M_{10}$	0	0
M_{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	M_{14}	$-M_{13}$	0	0	$-M_{10}$	M_9	0	0
M_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	M_{15}	M_{16}	0	0	$-M_{11}$	$-M_{12}$
M_{16}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	M_{16}	$-M_{15}$	0	0	$-M_{12}$	M_{11}

Соответствующие преобразования имеют вид:

1) прямое:

$$m_1 = M_1 + M_3 + M_9 + M_{11}, \qquad m_9 = -M_5 - M_7 - M_{13} + M_{15},$$
$$m_2 = -M_2 + M_4 - M_{10} + M_{12}, \qquad m_{10} = M_6 - M_8 + M_{14} - M_{16},$$
$$m_3 = -M_2 - M_4 - M_{10} - M_{12}, \qquad m_{11} = M_6 + M_8 + M_{14} + M_{16},$$
$$m_4 = -M_1 + M_3 - M_9 + M_{11}, \qquad m_{12} = M_5 - M_7 - M_{13} + M_{15},$$
$$m_5 = -M_5 - M_7 + M_{13} + M_{15}, \qquad m_{13} = -M_1 - M_3 + M_9 + M_{11},$$
$$m_6 = M_6 - M_8 - M_{14} + M_{16}, \qquad m_{14} = M_2 - M_4 - M_{10} + M_{12},$$
$$m_7 = M_6 + M_8 - M_{14} - M_{16}, \qquad m_{15} = M_2 + M_4 - M_{10} - M_{12},$$
$$m_8 = M_5 - M_7 - M_{13} + M_{15}, \qquad m_{16} = M_1 - M_3 - M_9 + M_{11}.$$

2) обратное:

$$m_1 = M_1 + M_3 + M_9 + M_{11}, \qquad m_9 = -M_5 - M_7 - M_{13} + M_{15},$$
$$m_2 = -M_2 + M_4 - M_{10} + M_{12}, \qquad m_{10} = M_6 - M_8 + M_{14} - M_{16},$$
$$m_3 = -M_2 - M_4 - M_{10} - M_{12}, \qquad m_{11} = M_6 + M_8 + M_{14} + M_{16},$$
$$m_4 = -M_1 + M_3 - M_9 + M_{11}, \qquad m_{12} = M_5 - M_7 - M_{13} + M_{15},$$
$$m_5 = -M_5 - M_7 + M_{13} + M_{15}, \qquad m_{13} = -M_1 - M_3 + M_9 + M_{11},$$
$$m_6 = M_6 - M_8 - M_{14} + M_{16}, \qquad m_{14} = M_2 - M_4 - M_{10} + M_{12},$$
$$m_7 = M_6 + M_8 - M_{14} - M_{16}, \qquad m_{15} = M_2 + M_4 - M_{10} - M_{12},$$
$$m_8 = M_5 - M_7 - M_{13} + M_{15}, \qquad m_{16} = M_1 - M_3 - M_9 + M_{11}.$$

4. $Д(K(e,4), W(g,2)) \simeq Д(\mathrm{C} \oplus \mathrm{C}(f,4), R \oplus R(h,2))$.

Есть системы $\Gamma_{11}(e,4) = K(e,4) \simeq C \oplus C(f,4) = \Gamma_{13}(f,4)$ и $\Gamma_7(g,2) = W(g,2) \simeq W_1(h,2) = \Gamma_8(h,2)$.

Известны прямое преобразование между базисами систем $\Gamma_{11}(e,4)$ и $\Gamma_{13}(f,4)$ и обратное преобразование (7). Между системами $\Gamma_7(g,2)$ и $\Gamma_8(h,2)$ также известны прямое и обратное преобразования (6).

Применим процедуру умножения размерности к системам $\Gamma_{11}(e,4)$ и $\Gamma_7(g,2)$:

$$Д(\Gamma_{11}(e,4), \Gamma_7(g,2)) = \Gamma_{17}(eg,8)$$

и к системам $\Gamma_{13}(f,4)$ и $\Gamma_8(h,2)$:

$$Д(\Gamma_{13}(f,4), \Gamma_8(h,2)) = \Gamma_{18}(fh,8).$$

Выполняются аналогичные этапы построения изоморфных пар ГЧС, учитывается переход к односимвольным обозначениям (4), (5). Получаются следующего вида таблицы умножения для систем $\Gamma_{17}(m,8)$ и $\Gamma_{18}(M,8)$:

$\Gamma_{17}(m,8)$	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8
m_1	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8
m_2	m_2	m_1	m_4	m_3	m_6	m_5	m_8	m_7
m_3	m_3	m_4	$-m_1$	$-m_2$	m_7	m_8	$-m_5$	$-m_6$
m_4	m_4	m_3	$-m_2$	$-m_1$	m_8	m_7	$-m_6$	$-m_5$
m_5	m_5	m_6	m_7	m_8	$-m_1$	$-m_2$	$-m_3$	$-m_4$
m_6	m_6	m_5	m_8	m_7	$-m_2$	$-m_1$	$-m_4$	$-m_3$
m_7	m_7	m_8	$-m_5$	$-m_6$	$-m_3$	$-m_4$	m_1	m_2
m_8	m_8	$-m_7$	$-m_6$	$-m_5$	$-m_4$	$-m_3$	m_2	m_1

и

$\Gamma_{18}(M,8)$	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
M_1	M_1	0	M_3	0	0	0	0	0
M_2	0	M_2	0	M_4	0	0	0	0
M_3	M_3	0	$-M_1$	0	0	0	0	0
M_4	0	M_4	0	$-M_2$	0	0	0	0
M_5	0	0	0	0	M_5	0	M_7	0
M_6	0	0	0	0	0	M_6	0	M_8
M_7	0	0	0	0	M_7	0	$-M_5$	0
M_8	0	0	0	0	0	M_8	0	$-M_6$

Соответствующие преобразования:

1) прямое:

$$
\begin{aligned}
m_1 &= M_1 + M_2 + M_5 + M_6,\\
m_2 &= M_1 - M_2 + M_5 - M_6,\\
m_3 &= -M_3 - M_4 + M_7 + M_8,\\
m_4 &= -M_3 + M_4 + M_7 - M_8,\\
m_5 &= -M_3 - M_4 - M_7 - M_8,\\
m_6 &= -M_3 + M_4 - M_7 + M_8,\\
m_7 &= -M_1 - M_2 + M_5 + M_6,\\
m_8 &= -M_1 + M_2 + M_5 - M_6,
\end{aligned}
$$

2) обратное:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \frac{1}{4}(m_1 + m_2 - m_7 - m_8),\\
M_2 &= \frac{1}{4}(m_1 - m_2 - m_7 + m_8),\\
M_3 &= \frac{1}{4}(-m_3 - m_4 - m_5 - m_6),\\
M_4 &= \frac{1}{4}(-m_3 + m_4 - m_5 + m_6),\\
M_5 &= \frac{1}{4}(m_1 + m_2 + m_7 + m_8),\\
M_6 &= \frac{1}{4}(m_1 - m_2 + m_7 - m_8),\\
M_7 &= \frac{1}{4}(m_3 + m_4 - m_5 - m_6),\\
M_8 &= \frac{1}{4}(m_3 - m_4 - m_5 + m_6).
\end{aligned}
$$

ГЧС нашли очень важные применения в различных областях: теоретической физике (кватернионное формулирование задач классической электродинамики и октонионная модель задач физики) [8, 9], в навигации, ориентации и управления движением твердого тела в трехмерном пространстве [10, 11], компьютерной графике [12], при исследовании деформации упругих и эластичных конструкций, фильтрации изображений; дуальные числа, дуальные и двойные кватернионы нашли широкое применение в задачах моделирования и управления плоскими механизмами, роботами и манипуляторами со многими степенями свободы и даже в моделировании задач биомеханики и т.д. [13–15].

Получение новых ГЧС с заданными свойствами позволит сформулировать и решать известные задачи более эффективным способом.

Заключение

Проведенные исследования по данной теме, а также материалы, изложенные в данной статье, указывают на возможность генерации разнообразных пар сильно- и слабозаполненных изоморфных коммутативных ГЧС высоких размерностей.

Применение изоморфных пар ГЧС разной сильной и слабой заполненности позволяет разрабатывать математические модели для решения разного вида задач, а также эффективно выполнять вычислительные процессы при моделировании.

1. *Гіперкомплексні* числові системи: основи теорії, практичні використання, бібліографія / [Синьков М.В., Боярінова Ю.Є., Каліновський Я.О. и др.]. — К., 2009. — 44 с. — (Препринт / НАН України, Ін-т проблем реєстрації інформації).

2. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова. — К.: НАН України, Ін-т проблем реєстрації інформації, 2010. — 389 с

3. *Кантор И.Л.* Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. — М.: Наука, 1973. — 144 с.

4. *Olariu S.* Complex Numbers in N Dimensions / S. Olariu // ELSEVIER Science B.V. — 2002. — P. 242

5. *Lounesto P.* Octonions and Triality / P. Lounesto // Advances in Applied Clifford algebras — 2001. — N 2. — P. 191–213.

6. *Culbert C.* Cayley-Dickson Algebras and Loops/ Culbert Craig // Journal of Generalized Lie Theory and Applications. — 2007. — Vol. 1, N 1. — P. 1–17

7. *Бояринова Ю.Е.* Построение высокоразмерных гиперкомплексных числовых систем с помощью процедуры умножения размерности / Ю.Е. Бояринова // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2011. — Т. 13, № 3. — С. 30–40.

8. *Mikhailichenko G.G.* Hypercomplex Numbers in the Theory of Physical Structures / G.G. Mikhailichenko, R.M. Muradov // Russian Mathematics (Iz VUZ). — 2008. — Vol. 52, N 10. — P. 20–24.

9. *Paul C.* An octonion model for physics / C. Paul // Proc. Of ECHO IV Conf.-2000. — Odense (Denmark). — 2000.

10. *Noise* Smoothing for VR Equipment in the Quaternion Space [Электронный ресурс] / Kim M., Hsieh C., Wang M. [et al.]. — Режим доступа: www_ivri.me.uic.edu/events/symp96/papers/IVRI31.html

11. *Ignagni M.B.* On the Orientation Vector Differential Equation in Strapdown Inertial Systems / M.B. Ignagni // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. — 1994. — Vol. 30, N 4. — P. 1076–1081.

12. *Mukundan R.* Quaternions: From Classical Mechanics to Computer Graphics, and Beyond / Mukundan R. // Proc. of the 7-th Asian Technology Conference in Mathematics. — 2002. — P. 97–106.

13. *Stephen J. Sangwine.* Fundamental Representations and Algebraic Properties of Biquaternions or Complexified Quaternions/ [Електронний ресурс] / S. Stephen J. Sangwine, Todd A. Ell, Nicolas Le Bihan. — Режим доступу: http://arXiv:1001.0240v1 (2010)

14. *McCarthy J.* Dimensional Synthesis Robots using a Double Quaternion Formulation of the Workspace / McCarthy J., Ahlers S. // Robotics Research: The Ninth International Symposium. — 2000. — P. 3–8.

15. *Yefremov A.P.* Quaternions: Algebra Geometry and Physical Theories / Yefremov A.P. // Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics. — 2004. — Vol. 1. — P. 104–120.

Поступила в редакцию 28.02.2012