DOI: 10.35681/1560-9189.2024.26.1.308507

УДК 004.942:621.311

О. Г. Додонов, А. І. Кузьмичов
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України,
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна
e-mail: akuzmychov@gmail.com

Кількісне оцінювання функціональної стійкості мережевих структур за параметричною чутливістю оптимізаційної моделі

Наведено типову задачу потокової оптимізації — про максимальний потік мережею, для якої розроблено аналітичну платформу щодо прогнозування поведінки організаційної структури та її складових за послідовною зміною значення ресурсу як параметра. Побудовано математичну та табличну моделі, розв'язано пряму та двоїсту задачі математичного програмування, організовано комп'ютерний експеримент оцінювання поведінки мережевої структури під впливом зовнішніх збурень. Отримані результати мають стати в нагоді планово-управлінському персоналу та топ-менеджменту з їхнього обговорення та прийняття рішень щодо зваженого розподілу енергетичних потоків у системі «джерела-стоки», призначення виконавців на роботи чи автоматизованого управління проектами.

Ключові слова: *оптимізаційне моделювання, потокова оптимізація, максимальний потік мережею, математичне програмування, мережеві організаційні структури, Management Science, Decision making, Excel Solver, Spreadsheet Modeling and Analytics.*

Вступ

У математичному програмуванні, успішній організаційній практиці та розвинених комп'ютерних технологіях визначальною за ефективністю та масовим застосуванням є потокова оптимізація як клас задач, моделей і яскравих впроваджень, що має конкретні відомості про походження[1]. Транспортна задача з проміжними пунктами (про потоки мінімальної вартості) — характерна модель, наступний крок її розвитку та наближення до реальності, як от перехід до мережевих структур, утворених зваженими вузлами джерел і стоків і проміжними «простими» вузлами

[1] Dantzig G.B. Application of the Simplex method to a Transportation problem/Activity Analysis of Production and Allocation, 1951. С. 359–373.

із транзитними (незмінними) ними потоками, нарешті, задача про максимальний потік, де основна увага приділена конфігурації і властивостям структури комунікацій [1, 2]. За роки інтенсивного розвитку аналітичного апарату потокової оптимізації усі вузли стали зваженими і універсальними з вагою у формі пропозиція/попит; мережа, відтворюючи практику, стала змішаною, з'явилися паралельні дуги.

Отже мережеві структури — це розповсюджена форма організаційної, ділової і виробничої діяльності, мережеві моделі відповідних об'єктів/процесів базуються на математичному, інформаційному і обчислювальному фундаментах, це ж важлива складова вищої освіти та практики загального та спеціального менеджменту й бізнес-аналітики.

Реальна мережева організаційна структура постійно знаходиться під впливами ззовні, які можуть бути приводом виникнення неочікуваних наслідків з-за каскадного розповсюдження відповідних збурень, направлених, зокрема, на її критично важливі параметри, звідси — актуальність уміння кількісно оцінювати стійкість досліджуваної структури.

Методика оцінювання

Мережева структура — зв'язана система вузлів і дуг, реальний стан розподілу потоків нею знаходиться, зокрема, під некерованим впливом ззовні, із різними властивостями, умовно, «позитивними» та «негативними, й, відповідно, з їхніми різними наслідками. Кількісне оцінювання таких впливів, особливо під час активних змін в оточуючому структуру середовищі, — серйозний виклик до розробки відповідних аналітичних моделей і розрахунків, які би дозволяли робити обґрунтований прогноз на тривалий горизонт планування й, зрозуміло, формувати проекти управлінських рішень за результатами відповідних оптимізаційних розрахунків.

У роботі наведено модель задачі мережевої оптимізації, де імітуються послідовні впливи ззовні, а отримані за ними наслідки у вигляді зміни змінних рішень досліджуються із використанням засобів аналізу параметричної чутливості основних показників на зміни вхідних даних.

Мережа (лінійний граф) $G = [N, A]$ складається із множини N елементів x_1, x_2, …, x_n та множини $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ із m упорядкованих пар $a_k = (x_i, x_j)$, $k = 1, \ldots, m$, утворених із елементів N згідно її конфігурації; $i, j = 1, \ldots, n$, (n, m) — розмір мережі, задачі і мережевої моделі. Елементи N називаються вузлами (nodes), а елементи A — дугами (arcs); вузли та дуги мають імена/коди, параметри та значення. Відтворюючи конфігурацію та конструктивні властивості реальної/модельної структури із вузлів і дуг згідно поставленої задачі, є мережевою моделлю, і процес модельного дослідження розпочинається із її зображення, основні класи мережевих моделей такі: направлена, ненаправлена, змішана.

У теорії математичної оптимізації мережеву структуру представляють у матричній, у розрахунках — у мережевій (табличній) формах, скажімо, матриця інциденцій «вузли-рядки – дуги-стовпці» зручна для суто математичної роботи, але дуже громіздка для обчислень, зате таблична форма лаконічна, бо містить дані лише для заданих n вузлів і m дуг, надалі застосовується. Кожному вузлу $x_i \in N$ відповідає число $\pi(x_i)$, це заданий ваговий коефіцієнт (потенціал), що відповідає пропозиції/попиту (в розрахунках може мати різні знаки), кожній дузі $(x_i, x_j) \in A$

відповідають числа: c_{ij}, питомі витрати на транспортування потоку дугою (x_i, x_j), p_{ij}, вага дуги (пропускна здатність).

Зображення направленої (орієнтованої) мережі формується із зображення кожного вузла x_i із N (прямокутник з ім'ям) і зображення кожної дуги (стрілка, направлена від вузла x_i до вузла x_j, для пари (x_i, x_j) із A, як от $\boxed{x_i} \to \boxed{x_j}$), у стрілки є початок (виходить із x_i) та кінець (входить у x_j). Мережа, як структура «вузли-дуги», окрім направлених може містити ненаправлені дуги ($\leftrightarrow$), останні зображують двома направленими назустріч стрілками, $(a \to b)$ та $(b \to a)$, та паралельні дуги, як от дуги $(b \to f)$ та $(b \to f)$, за властивостями однакові/різні, із однаковою/різною вагою, загалом, тоді це змішана мережа (рис. 1).

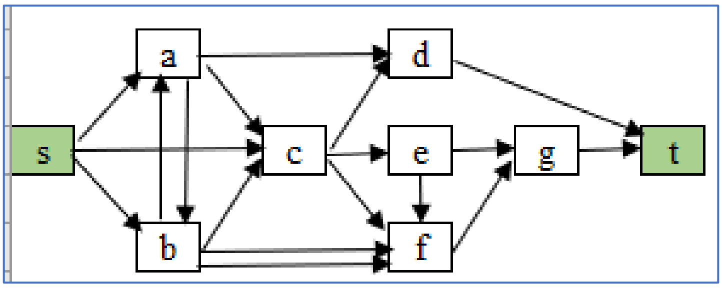


Рис. 1. Змішана мережева модель

Тут:

$N = (a, b, c, d, e, f, g, s, t)$, множина 9 вузлів;

$A = \{(s, a), (s, b), \ldots, (d, t), (g, t)\}$, множина 18 дуг.

Серед n вузлів виділяють два особливих вузла, це:

— вузол s (узагальнене штучне джерело, із якого сумарний потік шуканої величини v лише виходить, source);

— вузол t (узагальнений штучний стік, у який сумарний потік шуканої величини v лише входить, terminal), усі інші вузли — проміжні, у них потоки із певними значеннями входять і виходять, за класикою для них справедливе рівняння балансу (збереження потоку): скільки увійшло, стільки ж вийшло (враховуючи потенціал/вагу вузла).

Використання узагальнених вузлів, джерела та стоку в модифікованій мережі суттєво спрощує організацію моделювання, дозволяючи досить просто оновлювати структуру мережі зміною числа i локації заданих джерел і стоків без зміни формул, а лише зміною відповідних стрілок від s до t (рис. 2).

Задача про максимальний потік

У змішаній мережі із n вузлів і m дуг входами є вагові коефіцієнтів дуг, наприклад, їхні пропускні здатності, треба визначити значення максимального потоку v (пряма задача), який пройде від джерел до стоків, умовою є: сума потоків із джерел дорівнює сумі потоків у стоки. Розв'язком двоїстої задачі (на максимум іншої ЦФ, але з таким же значенням) є т.зв. мінімальний перетин (minimal cut) — найменша за кількістю сукупність насичених дуг, сумарна вага яких w дорівнює шуканому максимальному потоку v. Його видаленням мережу «перетинають», чим припиняють її функціонування, відокремлюючи джерела від стоків. Відповідно, для збільшення максимального потоку мережею ваги саме цих дуг збільшують, тож цінністю моделі «max-min» часто є знайдена ця сукупність дуг як «вузьке місце» (bottleneck) мережі [3].

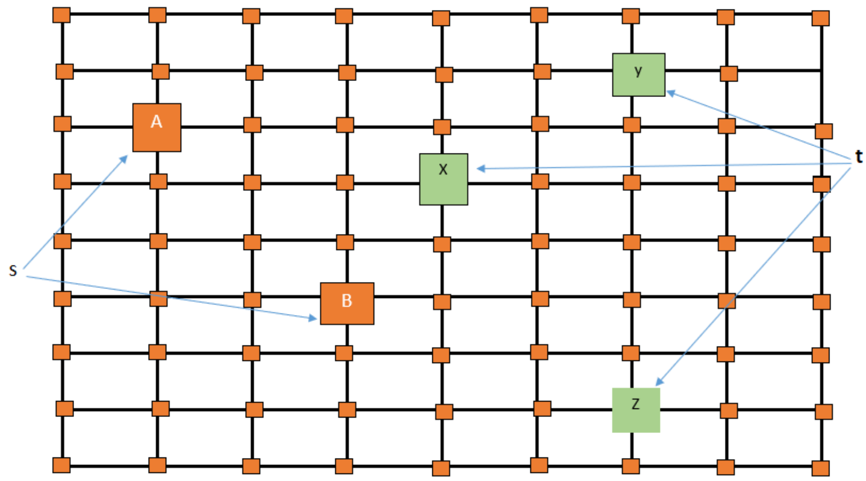


Рис. 2. Модифікована (s, t)-мережа

Для будь-якого i-го вузла в математичній моделі шукані дугові потоки $f(x_i, x_j)$ мають задовольняти таким лінійним рівнянням, а для будь-якої (x_i, x_j)-ої дуги — нерівностям:

$$i = s \rightarrow \sum_{j \in A(s)} f(s, j) = v$$

$$i = t \rightarrow \sum_{j \in B(t)} f(j, t) = v$$

$$i \neq j \rightarrow \sum f_{вих}(x_i, x_j) - \sum f_{вх}(x_j, x_i) = 0$$

$$f(x_i, x_j) \leq c(x_i, x_j)$$

<u>Приклад.</u>

Задана змішана мережева структура: $n = 9$, $m = 18$ (рис. 1).

Вхідні дані: вектор вагових коефіцієнтів $P = (p_1, \ldots, p_{18})$.

Задача оптимізації

Знайти: вектор потоків $F(18)$

ЦФ $\quad v = \sum_{j \in A(s)} f(s, j) \rightarrow \max$

за обмежень:

$$\sum_{j \in B(t)} f(j, t) = v$$

$$\sum_{j \in B(t)} f(j, t) - \sum_{j \in A(s)} f(s, j) = 0 \qquad f(x_i, x_j) \geq 0 \quad f(x_i, x_j) \leq p(x_i, x_j)$$

$A(s)$, $B(t)$ — множини вузлів, куди виходять потоки із s, входять в t, відповідно.

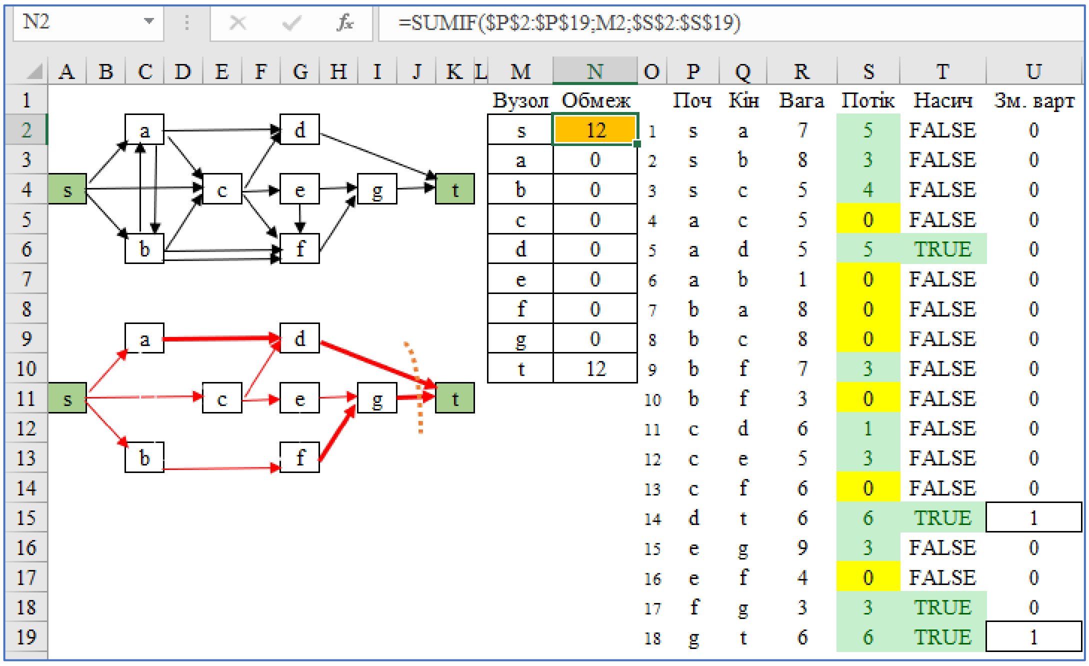
Таблична модель

Входи: список вузлів (M1:M10), список координат і вагових коефіцієнтів дуг (P1:R19).

Обчислення: ЦФ і ліві частин обмежень для вузлів (N2:N10).

Виходи (результат оптимізації): значення потоків (S1:S19), значення ЦФ (N2), насиченість дуг (T1:T19), двоїсті оцінки/Звіт стійкість (U1:U19).

Результат виглядає таким чином (рис. 3).



Вузол	Обмеж		Поч	Кін	Вага	Потік	Насич	Зм. варт
s	12	1	s	a	7	5	FALSE	0
a	0	2	s	b	8	3	FALSE	0
b	0	3	s	c	5	4	FALSE	0
c	0	4	a	c	5	0	FALSE	0
d	0	5	a	d	5	5	TRUE	0
e	0	6	a	b	1	0	FALSE	0
f	0	7	b	a	8	0	FALSE	0
g	0	8	b	c	8	0	FALSE	0
t	12	9	b	f	7	3	FALSE	0
		10	b	f	3	0	FALSE	0
		11	c	d	6	1	FALSE	0
		12	c	e	5	3	FALSE	0
		13	c	f	6	0	FALSE	0
		14	d	t	6	6	TRUE	1
		15	e	g	9	3	FALSE	0
		16	e	f	4	0	FALSE	0
		17	f	g	3	3	TRUE	0
		18	g	t	6	6	TRUE	1

Рис. 3. Таблична модель, результат

Аналіз результату

Пряма задача: максимальний потік (ЦФ) = 12. Потоки: із 18 дуг, 7 дуг з нульовими потоками, 4 дуги (True) насичені, інші мають резерв.

Двоїста задача: дві насичені дуги: (d, t) та (g, t) утворили мінімальний перетин («вузьке місце»), це означає, що заради збільшення потоку треба збільшувати вагу саме цих дуг.

Аналіз чутливості

Збільшувати їхню вагу можна окремо чи разом, про це — в таблиці аналізу чутливості, у ній — збільшення ваги кожної із цих дуг від заданих 6 до 18.

Одноосібно: R15 доведе значення ЦФ до 14 при вазі до 8, R19 — до 17 при вазі до 11. Разом — максимальний приріст до v = 19, далі збільшувати ваги нема сенсу, бо мінімальний перетин утворять інші дуги (зафіксувати нові ваги та повторити розв’язок).

N2	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
6	12	13	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14
7	13	14	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
8	14	15	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
9	15	16	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17
10	16	17	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
11	17	18	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19
12	17	18	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19
13	17	18	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19
14	17	18	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19
15	17	18	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19
16	17	18	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19
17	17	18	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19
18	17	18	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19

Кількісне оцінювання зміни стану мережевої структури

Певна мережева структура із розподілу потоків від джерел до стоків під впливом ззовні за їхніми наслідками може перебувати у двох протилежних станах, починаючи із поточного стану «як є», це: зростання та розвиток або спад, деградація аж до ліквідації, залежно від характеру впливів.

Коли структура поступово розвивається згідно її функціональності/призначення, конкретна ознака — зростання значення основного вихідного показника, у цій задачі — величини максимального потоку (ЦФ), отримавши додатковий «позитивний» ресурс, який надалі розподіляється між складовими, відповідно змінюючи певні параметри та відносини (покращення умов життя або ж, навпаки, аварійні чи надзвичайні ситуації), далі — розвиток, це позитив.

Стан деградації структури (за моделлю про максимальний потік) виникає, скажімо, із-за аварії або планового виведення з експлуатації застарілого обладнання чи споруди, і коли одночасно будується відповідне нове, тоді при поступовому зниженні необхідного ресурсного забезпечення (додатковий ресурс від'ємний) структура має зберігати свою, хоч і обмежену, функціональність/стійкість (бо ж треба забезпечувати якнайбільший потік чогось) якнайдовше. Такий же стан, і це важливіше, також може бути, якщо певну «погану» (чит. ворожу) організаційну структуру треба ліквідувати за наявним і обмеженим відповідним атакуючим ресурсом (персонал, обладнання, матеріали, час), математично, це — двоїста задача моделі про максимальний потік про пошук мінімального перетину [4].

Ідея: в моделі, що обговорюється, визначається ключовий параметр, вага якого є складовою правої частини обмеження щодо дугового потоку, організується циклічний обчислювальний процес параметричного аналізу чутливості, за яким, на кожному кроці, зі зміною значення ключового параметра (з урахуванням допоміжного ресурсу як аналогу пливу) отримують значення виходів оптимізаційної задачі [5–9].

У задачі, що розглядається, збільшити потік мережею можна збільшивши значення ваг дуг, маючи задану додаткову величину інвестиційного ресурсу (r), відповідно, ставиться задача оптимального розподілу цього ресурсу між m дугами за діючим критерієм — максимізації потоку від джерел до стоків. За цим принципом на

k-ту дугу припаде знайдена оптимальна частка r_k цього ресурсу, якщо базову нерівність $f(x_i, x_j) \le c(x_i, x_j)$ замінити на $f(x_i, x_j) \le c(x_i, x_j) + \phi(r_k)$, це — нова вага дуги, $\phi(r_k)$ — приріст ваги за рахунок допоміжного ресурсу. Наприклад, 14-та дуга (d, t) вагою $c_{14} = 6$, для її подвоєння треба $\rho_{14} = 2$ од. ресурсу, отримано $r_{14} = 1$ од. ресурсу, тоді нова вага $c_{14} = 6 + 1/2*8 = 9$:

M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
Вузол	Обмеж		Поч	Кін	Вага	Рес	Потік	Вплив	Нова вага
		14	d	t	6	2	9	1	9
		15	e	g	9	2	3	0	9

Зміна базової моделі: додаються щодо ресурсів: вектори заданих і шуканих параметрів (ρ_{ij}) і змінних (r) та пропозиція (R), яка оптимально розподіляється між дугами, змінюючи праві частини обмежень для дуг (і тим самим збільшуючи потік).

Таблична модель

Отримання оптимального розв'язку як варіант майбутнього планово-управлінського рішення передбачає проведення певної аналітичної роботи на кожному кроці, бо ж це лише модель реальності, як от, заміна знайденого оптимального значення введенням до плану інших змінних чи їхніх комбінацій додатковими обмеженнями (рис. 4).

M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
Вузол	Обмеж		Поч	Кін	Вага	Рес	Потік	Вплив	Нова вага
s	14,3	1	s	a	7	7	5,0	0	7
a	0	2	s	b	8	2	4,3	0	8
b	0	3	s	c	5	2	5,0	0	5
c	0	4	a	c	5	7	5,0	0	5
d	0	5	a	d	5	3	0,0	0	5
e	0	6	a	b	1	8	0,0	0	1
f	0	7	b	a	8	7	0,0	0	8
g	0	8	b	c	8	2	1,3	0	8
t	14,3	9	b	f	7	3	3,0	0	7
		10	b	f	3	7	0,0	0	3
		11	c	d	6	2	6,3	0	6
		12	c	e	5	5	5,0	0	5
		13	c	f	6	8	0,0	0	6
		14	d	t	6	6	6,3	0	6
		15	e	g	9	8	5,0	0	9
		16	e	f	4	7	0,0	0	4
		17	f	g	3	3	3,0	0	3
		18	g	t	6	2	8,0	1	8
								1	
							Проп.	1	

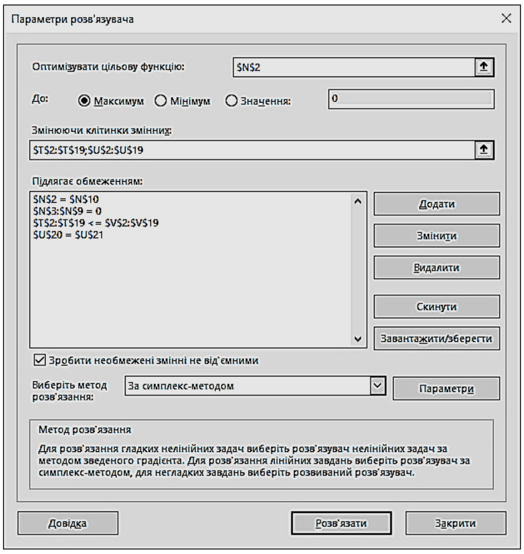


Рис. 4. Таблична модель

Параметричний аналіз чутливості

Це — обчислювальна процедура багатократного розв'язку оптимізаційної задачі з покроковою зміною ресурсу як параметра, наприклад, у діапазоні $R = 0 \div 20$, де чітко проявляються характерні системні властивості структури як от вразливість дуг і, відповідно, чутливість цільової функції чи інших виходів від цього параметра.

Оскільки основною зацікавленою особою і замовником оптимізаційного моделювання є ОПР (особа, що приймає рішення, decision maker), її увагу прикуто до наслідків, бо за ними реалізація підтверджених розрахунками рекомендацій: ЩО треба змінювати, ЯКЩО отримати цей ресурс (бо реально, це — «проблема», і не виключено, що реакцією ОПР буде відмова від «гарної» пропозиції, із розумінням не покращення/погіршення значення ЦФ при інших варіантах). Результат цього аналізу — зображення послідовної зміни конфігурації і значень потоків мережею під впливом зміни значення ресурсу (рис. 5).

Ця таблиця — ілюстрація запропонованого підходу до кількісного оцінювання стійкості/вразливості/реакції на впливи складових структури, конкретна відповідь на запитання: «Куди і скільки направити наявні інвестиції для їхнього найкращого використання?».

R	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16	T17	T18	T19	N2
0	5	2	5	5	0	0	0	1	1	0	6	5	0	6	5	0	1	6	12,0
1	5	4,3	5	5	0	0	0	1,3	3,0	0	6,3	5	0	6,3	5	0	3	8	14,3
2	5	5,0	5	5	0	0	0	2,0	3,0	0	7,0	5	0	7,0	5	0	3	8	15,0
3	5	5,8	5	5	0	0	0	2,8	3,0	0	7,8	5	0	7,8	5	0	3	8	15,8
4	5	6,5	5	5	0	0	0	3,5	3,0	0	8,5	5	0	8,5	5	0	3	8	16,5
5	5	7,3	5	5	0	0	0	4,3	3,0	0	9,3	5	0	9,3	5	0	3	8	17,3
6	5	8,0	5	5	0	0	0	5,0	3,0	0	10,0	5	0	10,0	5	0	3	8	18,0
7	5	8,6	5	5	0	0	0	5,6	3,0	0	10,6	5	0	10,6	5	0	3	8	18,6
8	5	9,3	5	5	0	0	0	6,3	3,0	0	11,3	5	0	11,3	5	0	3	8	19,3
9	5	9,9	5	5	0	0	0	6,9	3,0	0	11,9	5	0	11,9	5	0	3	8	19,9
10	5	10,5	5	5	0	0	0	7,5	3,0	0	12,5	5	0	12,5	5	0	3	8	20,5
11	5	11,2	5	5	0	0	0	8,0	3,2	0	13,0	5	0	13,0	5	0	3	8,2	21,2
12	5	11,8	5	5	0	0	0	8,0	3,8	0	13,0	5	0	13,0	5	0	4	8,8	21,8
13	5	12,4	5	5	0	0	0	8,0	4,4	0	13,0	5	0	13,0	5	0	4	9,4	22,4
14	5	13,1	5	5	0	0	0	8,0	5,1	0	13,0	5	0	13,0	5	0	5	10,1	23,1
15	5	13,7	5	5	0	0	0	8,0	5,7	0	13,0	5	0	13,0	5	0	6	10,7	23,7
16	5	14,3	5	5	0	0	0	8,0	6,3	0	13,0	5	0	13,0	5	0	6	11,3	24,3
17	5	14,9	5	5	0	0	0	8,0	6,9	0	13,0	5	0	13,0	5	0	7	11,9	24,9
18	5	15,6	5	5	0	0	0	8,0	7,0	0,6	13,0	5	0	13,0	5	0	8	12,6	25,6
19	5	16,2	5	5	0	0	0	8,0	7,0	1,2	13,0	5	0	13,0	5	0	8	13,2	26,2
20	5	16,8	5	5	0	0	0	8,0	7,0	1,8	13,0	5	0	13,0	5	0	9	13,8	26,8
	s	s	s	a	a	a	b	b	b	b	c	c	c	d	e	e	f	g	
	a	b	c	c	d	b	a	c	f	f	d	e	f	t	g	f	g	t	

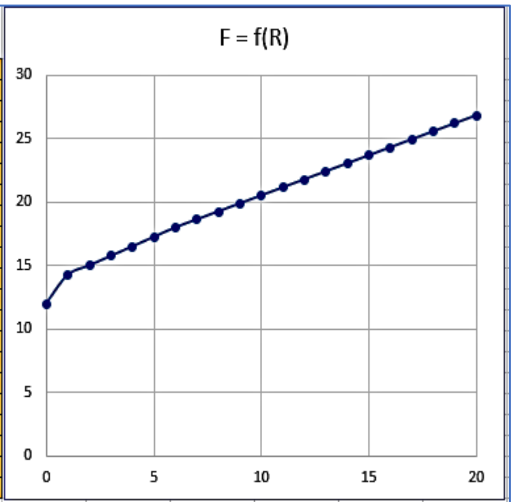


Рис. 5. Аналітична платформа: сценарій, каскадний процес, показник (ЦФ)

Системна властивість моделі — це зв'язність мережевої структури та баланс потоків в усіх вузлах: $f(s) = f(t) = v$, $f_{вих}(i) = f_{вх}(i)$, що приводить до впливу «точкової» зміни параметра певної дуги на усі інші дуги, їхня реакція різна: потік дугою змінюється (слабо, сильно)/не змінюється, і знати це важливо.

Наведена конструкція (рис. 5) — це своєрідна аналітична платформа, що побудована за аналізом «What-if», яка надає кількісний прогноз організаційного процесу, де:

1) по рядках — r-сцени загального сценарію з поточними значеннями 18 змінних (як «діючих осіб»), $R = 1 \div 20$;

2) послідовність сцен — каскадний процес із відповідними «хвилями» змін;

3) крайній справа стовпець зі значеннями ЦФ містить кількісні оцінки функціональності структури (у певному вимірі, наприклад, у м^3), а кожна клітинка — поточне значення шуканого потоку, які формують результат.

Оскільки розв'язок задачі оптимізації — це рекомендація щодо управлінського рішення, яке приймають відповідальні особи, увагу слід приділити потокам, які змінюються, і на відповідні їм дуги, як на певні об'єкти структури (з їхніми керівниками та виконавцями). Особливу увагу дослідника заслуговують дуги, на значення потоків якими сильно впливають (і будуть впливати) допоміжні ресурси, із утворенням домінуючих ланцюгів (як от на ланцюг 33 → 34 → 44 приходиться до 80 % сумарних потоків $s \to t$).

Модель гнучка, для її адаптації до реального стану ситуації завжди є можливість скорегувати план уведенням відповідних обмежень на шукані значення змінних рішень $f(x_i, x_j)$.

За наведеною методикою можна побудувати декілька таких діаграм, щоб зрозуміти тенденції, зробити прогноз і висновки загального характеру, для різних діапазонів значення пропозиції (R).

Деградація мережевої структури із розподілу потоків

Для цієї задачі застосовуємо запропоновану методику заміною правої частини обмеження $f(x_i, x_j) \le c(x_i, x_j) + \phi(r_k)$ на $f(x_i, x_j) \le c(x_i, x_j) - \phi(r_k)$ із реалізацією параметричного аналізу чутливості циклічною зміною значення поточного ресурсу (R) в певному діапазоні. Видно (рис. 6, 7), що структура на кожному кроці повторного розв'язання задачі оптимізації якомога зберігала максимальний потік величиною 12 од., утворюючи характерні зони, до:

R = 18 — змінюються параметри дуг з резервами (без змін значень потоків);

R = 52 — змінюється конфігурація розподілу потоків аж до насиченості дуг, ця поведінка є показником досить тривалої стійкості структури в умовах зростання впливів;

Далі — резерви вичерпані, поступове зниження стійкості з утриманням часткової функціональності аж до її повного припинення.

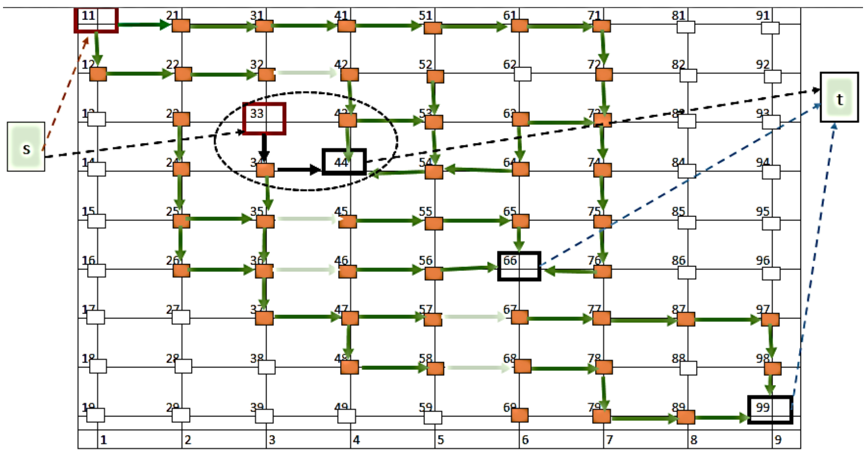


Рис. 6. Джерела (11, 33), стоки (44, 66, 99)

У практичних застосуваннях типова ситуація на кордонах/фронті: із-за недостатньої кількості оборонних ресурсів для повного контролю існують неконтрольовані зони для контрабанди, в моделі сукупність таких зон називається перетином або «вузьким місцем» (bottleneck).

R	STS2	STS3	STS4	STS5	STS6	STS7	STS8	STS9	STS10	STS11	STS12	STS13	STS14	STS15	STS16	STS17	STS18	STS19	SNS2
0	6	1	5	1	5	0	0	0	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
2	6	1	5	1	5	0	0	0	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
4	6	1	5	1	5	0	0	0	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
6	6	1	5	1	5	0	0	0	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
8	6	1	5	1	5	0	0	0	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
10	6	1	5	1	5	0	0	0	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
12	6	1	5	1	5	0	0	0	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
14	6	1	5	1	5	0	0	0	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
16	6	1	5	1	5	0	0	0	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
18	6	1	5	1	5	0	0	0	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
20	5,6	1,4	5	1	5	0	0,4	0,0	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
22	6,0	1,0	5	1	5	0	0,0	0,0	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
24	1,6	5,4	5	0	5	0	3,4	1	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
26	0	7,0	5	0	5	0	5,0	1	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
28	0	7,0	5	0	5	0	5,0	1	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
30	0	7,0	5	0	5	0	5,0	1	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
32	0	7,0	5	0	5	0	5,0	1	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
34	0	7,0	5	0	5	0	5,0	1	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
36	0	7,0	5	0	0	0	0	6	1	0	6	5	0	6	5	0	1	6	12,0
38	0	7,0	5	0	0	0	0	6	1	0	6	5	0	6	5	0	1	6	12,0
40	0	7,0	5	0	0	0	0	6	1	0	6	5	0	6	5	0	1	6	12,0
42	6	1,0	5	1	5	0	0	0	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
44	5	2,0	5	0	5	0	0	1	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
46	5	2,0	5	0	5	0	0	1	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
48	5	2,0	5	0	5	0	0	1	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
50	5	2,0	5	0	5	0	0	1	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
52	5	2,0	5	0	5	0	0	1	1	0	1	5	0	6	5	0	1	6	12,0
54	5	1,9	5	0	5	0	0	1	0,9	0	1	5	0	6	5	0	0,9	5,9	11,9
56	5	1,5	5	0	5	0	0	1	0,5	0	1	5	0	6	5	0	0,5	5,5	11,5
58	5	1,1	5	0	5	0	0	1	0,1	0	1	5	0	6	5	0	0,1	5,1	11,1
60	5	0,5	5	0	5	0	0	0,5	0,0	0	1	4,5	0	6	4,5	0	0,0	4,5	10,5
62	5	0	4,7	0	5	0	0	0	0	0	1	3,7	0	6	3,7	0	0,0	3,7	9,7
64	5	0	3,9	0	5	0	0	0	0	0	1	2,9	0	6	2,9	0	0,0	2,9	8,9
66	5	0	3,0	0	5	0	0	0	0	0	1	2,0	0	6	2,0	0	0,0	2,0	8,0
68	5	0	2,1	0	5	0	0	0	0	0	1	1,1	0	6	1,1	0	0,0	1,1	7,1
70	5	0	1,2	0	5	0	0	0	0	0	1	0,2	0	6	0,2	0	0,0	0,2	6,2
72	5	0	0,2	0	5	0	0	0	0	0	0,2	0,0	0	5,2	0,0	0	0,0	0,0	5,2
74	4,0	0	0,0	0	4,0	0	0	0	0	0	0,0	0,0	0	4,0	0,0	0	0,0	0,0	4,0
76	2,9	0	0,0	0	2,9	0	0	0	0	0	0,0	0,0	0	2,9	0,0	0	0,0	0,0	2,9
78	1,7	0	0,0	0	1,7	0	0	0	0	0	0,0	0,0	0	1,7	0,0	0	0,0	0,0	1,7
80	0,6	0	0,0	0	0,6	0	0	0	0	0	0,0	0,0	0	0,6	0,0	0	0,0	0,0	0,6
	s	s	s	a	a	a	b	b	b	b	c	c	c	d	e	e	f	g	
	a	b	c	c	d	b	a	c	f	f	d	e	f	t	g	f	g	t	

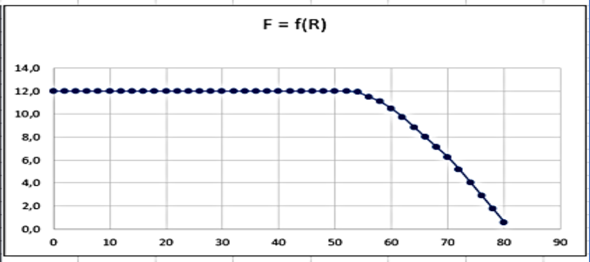


Рис. 7. Аналітична платформа

Пошук мінімального перетину часто важливіший за пошук максимального потоку, зокрема, це прихована ціль недавно розсекреченої публікації [3], присвяченій начебто пошуку максимального потоку.

У моделі max-min мінімальний перетин — це результат двоїстої задачі, але на практиці проблемою є дефіцит ресурсу для миттєвого перекриття. В [4] запропоновано модель поступового його перекриття послідовною додачею атакуючого ресурсу, в певних ситуаціях не слід прагнути до повного перекриття, залишаючи певний витік для власних цілей.

Задача оптимізації

$$ЦФ \quad \sum_{(i,\, j \in A)} c_{ij} f_{ij} \to \min$$

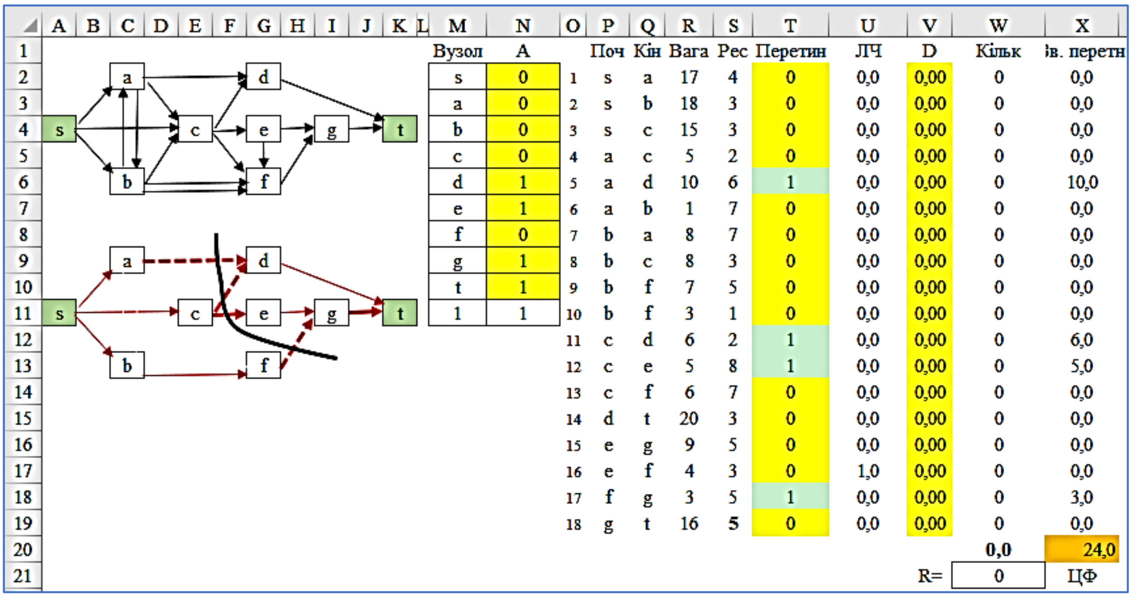
за обмежень

$$a_i - a_j + b_{ij} + d_{ij} \geq 0 \qquad \sum r_{ij} d_{ij} \leq R$$

$$a_t - a_s \geq 1 \qquad a_i, b_{ij}, d_{ij} \geq 0.$$

Таблична модель має вигляд, як на рис. 8.

При пропозиції ресурсу $R = 0$ базова ситуація: мінімальний перетин (чорна лінія) утворюють 4 дуги: $\{(a, d), (c, d), (c, e), (f, g)\}$, максимальний потік мережею та розмір перетину дорівнює $v = 24$ од. У цій моделі (на мінімум ЦФ) витік зменшують аж до ліквідації послідовним звуженням дуг у складі перетину аж до їхнього перекриття шляхом зменшення ваг цих дуг атакуючим ресурсом (норми потрібного ресурсу задані, стовпець Рес).

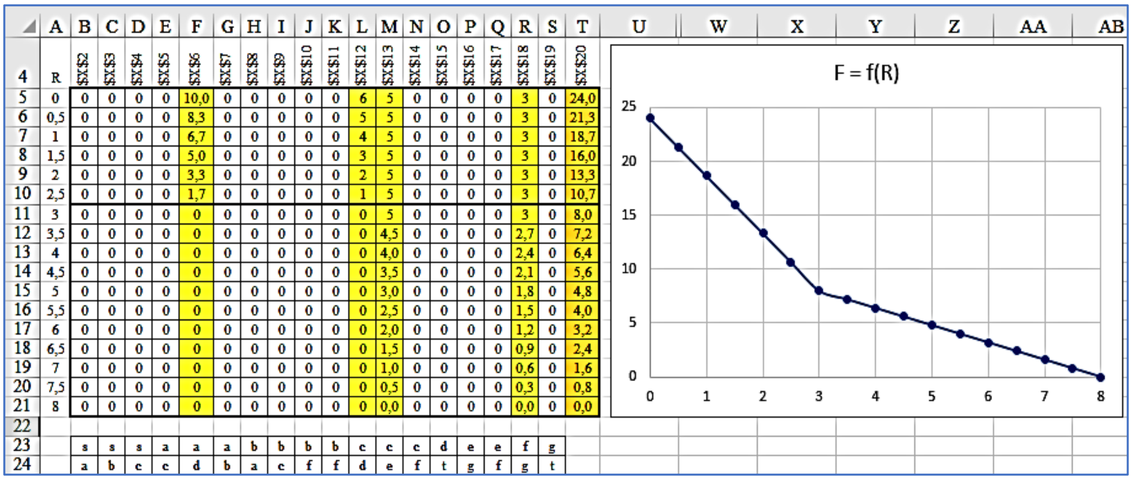


Вузол	A
s	0
a	0
b	0
c	0
d	1
e	1
f	0
g	1
t	1
1	1

	Поч	Кін	Вага	Рес	Перетин	ЛЧ	D	Кільк	ів. перетн
1	s	a	17	4	0	0,0	0,00	0	0,0
2	s	b	18	3	0	0,0	0,00	0	0,0
3	s	c	15	3	0	0,0	0,00	0	0,0
4	a	c	5	2	0	0,0	0,00	0	0,0
5	a	d	10	6	1	0,0	0,00	0	10,0
6	a	b	1	7	0	0,0	0,00	0	0,0
7	b	a	8	7	0	0,0	0,00	0	0,0
8	b	c	8	3	0	0,0	0,00	0	0,0
9	b	f	7	5	0	0,0	0,00	0	0,0
10	b	f	3	1	0	0,0	0,00	0	0,0
11	c	d	6	2	1	0,0	0,00	0	6,0
12	c	e	5	8	1	0,0	0,00	0	5,0
13	c	f	6	7	0	0,0	0,00	0	0,0
14	d	t	20	3	0	0,0	0,00	0	0,0
15	e	g	9	5	0	0,0	0,00	0	0,0
16	e	f	4	3	0	1,0	0,00	0	0,0
17	f	g	3	5	1	0,0	0,00	0	3,0
18	g	t	16	5	0	0,0	0,00	0	0,0
								0,0	24,0
							R=	0	ЦФ

Рис. 8. Таблична модель, результат

Аналіз чутливості виглядає таким чином (рис. 9).



R	\$X\$2	\$X\$3	\$X\$4	\$X\$5	\$X\$6	\$X\$7	\$X\$8	\$X\$9	\$X\$10	\$X\$11	\$X\$12	\$X\$13	\$X\$14	\$X\$15	\$X\$16	\$X\$17	\$X\$18	\$X\$19	\$X\$20
0	0	0	0	0	10,0	0	0	0	0	0	6	5	0	0	0	0	3	0	24,0
0,5	0	0	0	0	8,3	0	0	0	0	0	5	5	0	0	0	0	3	0	21,3
1	0	0	0	0	6,7	0	0	0	0	0	4	5	0	0	0	0	3	0	18,7
1,5	0	0	0	0	5,0	0	0	0	0	0	3	5	0	0	0	0	3	0	16,0
2	0	0	0	0	3,3	0	0	0	0	0	2	5	0	0	0	0	3	0	13,3
2,5	0	0	0	0	1,7	0	0	0	0	0	1	5	0	0	0	0	3	0	10,7
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	3	0	8,0
3,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4,5	0	0	0	0	2,7	0	7,2
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4,0	0	0	0	0	2,4	0	6,4
4,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,5	0	0	0	0	2,1	0	5,6
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,0	0	0	0	0	1,8	0	4,8
5,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,5	0	0	0	0	1,5	0	4,0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,0	0	0	0	0	1,2	0	3,2
6,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,5	0	0	0	0	0,9	0	2,4
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,0	0	0	0	0	0,6	0	1,6
7,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	0	0	0	0,3	0	0,8
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0,0
	s	s	s	a	a	a	b	b	b	b	c	c	c	d	e	e	f	g	
	a	b	c	c	d	b	a	c	f	f	d	e	f	t	g	f	g	t	

Рис. 9. Аналітична платформа

До рівня R = 2,5 перетин складається із 4-х дуг, далі — дві закриті дуги, дві залишаються аж до припинення функціонування та ліквідації структури. Для практики ця таблиця, фактично, програма дій щодо змін пропозицій і відповідного розподілу ресурсу.

Висновки

Розроблено аналітичну платформу у складі проблемно-сценарного аналізу, здійснення каскадного процесу та виконання оптимізаційного моделювання з використанням надбудов Excel Solver та Solver Table для кількісного оцінювання функціональної ефективності/стійкості мережевої структури. За її допомогою можна отримати відповідь про поведінку такої структури під впливами ззовні, різних властивостей і цілей. Цей підхід дозволяє побудувати кількісний прогноз результатів оптимізації на різних рівнях ресурсного забезпечення, побудований на табличному представленні вихідних даних і їхньої візуалізації, сформувати управлінське рішення щодо роботи з об'єктом у надзвичайних ситуаціях.

1. Dantzig G.B. Linear Programming and Extensions. Princeton Univ. Press, 1963. 635 p.
2. Fulkerson D.R., Dantzig G.B. Computations of Maximal Flows in Networks. in *Naval Res. Logist. Quart*. 1955. Vol. 2, No. 4. P. 277–283.
3. Harris T., Ross F. Fundamentals of a Method for Evaluation Rail Net Capacities. RAND, 1955. 63 p.
4. Wood K. Deterministic Network Interdiction. Math. And Comp. Mod. 1993. Vol.17, No. 2. P. 1–18.
5. Кузьмичов А.І. Оптимізаційні методи і моделі. Практикум в Excel. Київ: ВПЦ АМУ, 2013. 438 с.
6. Anderson D. et al. An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making, 16-ed. Cengage, 2019. 794 p.
7. Додонов О.Г., Кузьмичов А.І. Мережеві організаційні структури управління. Моделювання та візуалізація засобами Excel. Київ: Вид-во Ліра-К, 2021. 297 с.
8. Кузьмичов А.І., Чернецька Ю.В., Шестаков В.А. Пошук і аналіз чутливості часових оптимальних планів постачання енергетичних ресурсів із застосуванням надбудови SolverTable. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2022. Т. 24, № 2. С. 62–71. https://doi.org/10.35681/1560-9189.2022.24.2.275103
9. Додонов О.Г., Кузьмичов А.І., Чернецька Ю.В. Модель кількісного оцінювання стійкості системи (розподілу енергетичних ресурсів)/Живучість та резильєнтність критичної інфраструктури – 2023: зб. матеріалів Міжн. наук.-практ. конф. м. Київ, 19.10.2023 р. ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України, 2023. С. 16–17.

Надійшла до редакції 21.02 2024