

**А. І. Кузьмичов**

Інститут проблем реєстрації інформації НАН України  
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна  
e-mail: akuzmychov@gmail.com

## **Організація транспортних маршрутів у задачах зберігання, розподілу та постачання ресурсів за оптимізаційною моделлю MILP**

*Задача маршрутизації транспортних потоків (The vehicle routing problem, VRP) — це комбінаторна оптимізаційна задача цілочислового програмування. Мета полягає в організації оптимальної сукупності локальних маршрутів транспортних засобів (ТЗ), від кількох до одного, за їхньою кількістю, конфігурацією та завантаженням, для мінімізації загальних транспортних витрат на доставку замовлень із єдиного центра клієнтам за їхніми заданими координатами розташування. VRP є типовою складовою транспортної логістики та ланцюгів постачання, сфери надання послуг з поточного обслуговування об'єктів, оперативного ремонту та ліквідації аварій у мережевих організаційних структурах. За своєю постановкою це ускладнена та зважена модель класичної задачі комівояжера, де оптимізується не лише контур обходу, але й розподіл ресурсу згідно замовлень клієнта. У статті введено додаткове ускладнення — територіально розподілені пропозиції ресурсного забезпечення. Для розв'язання цієї задачі доступними аналітичними засобами Excel в освітньо-дослідницькій практиці розроблено та перевірено на конкретних прикладах модель MILP.*

**Ключові слова:** мережеві організаційні структури, мережеве оптимізаційне моделювання, транспортна логістика, ланцюги постачання, електронно-табличне моделювання, оптимізаційні методи та моделі в Excel.

### **Вступ**

У класичній постановці VRP [1, 2] необхідні ресурси, що зосереджені в одному розподільчому центрі, звідки транспортними засобами, одного чи різного типу, із єдиного депо, доставляються за відповідними замовленнями визначеним маршрутом. Централізація забезпечує якісне зберігання і обслуговування ресурсів, але в напруженій оперативній ситуації, що може статися, її наслідками є миттєво підви-

пені потреби на різноманітні непередбачені послуги, перенавантаження комунікацій, пошук необхідних транспортних і спеціальних технічних засобів у достатній кількості тощо.

У наведеній моделі разом із класичною досліджено схему децентралізованого розміщення та відповідного зваженого розподілу обмежених і критично необхідних ресурсів, що суттєво знижує витрати та послаблює напруження із прийняття оперативних управлінських рішень, особливо під час регулярних надзвичайних ситуацій різного рівня, де цілком достатньо мати наближений розв'язок. Ці схеми реалізовано розв'язанням відповідних оптимізаційних задач доступними аналітичними засобами, наведено приклади модельних розрахунків.

Із практики оптимізаційного моделювання VRP — це узагальнення класичної задачі комівояжера (ЗК) [3], враховуючи обмеження на потенціал ТЗ, це фактично, задача про  $k$  комівояжерів [4]. У її класичній постановці запропоновано оригінальну версію моделі лінійного програмування<sup>1</sup> (до шуканих змінних рішень дійсного типу додано змінні 0/1 типу, а симплекс-метод, відповідно, доповнено модулем побудови січної площини), за сучасною термінологією — це модель MILP (Mixed-Integer Linear Programming [5]).

Суть узагальнення ЗК зведенням до класичної VRP — врахування специфічних умов щодо поставленої практичної задачі, де замість одного контуру обходу усіх  $n$  пунктів вимушено (із-за обмежених функціональних властивостей ТЗ) формуються локальні контури як часткові маршрути, де:

- транспортна мережа складається із одного центра ( $i = 1$ , парк ТЗ), звідси ТЗ виїжджають і сюди повертаються, та пунктів розташування клієнтів ( $2, \dots, n$ ), значення  $n$  — розмір VRP;
- ТЗ мають заданий ресурсний потенціал (ємність, вантажопідйомність)  $P$ ;
- кожен  $i$ -й клієнт має задане замовлення/запас  $z_i$  та задані координати розташування  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 2 \dots n$ ,  $Z$  — сума замовлень.

Якщо  $P \geq Z$ , то VRP зводиться до ЗК з одним контуром, що починається і закінчується в центрі ( $i = 1$ ), інакше буде декілька локальних контурів, утворених кількома ТЗ із заданим значенням  $P$  [3].

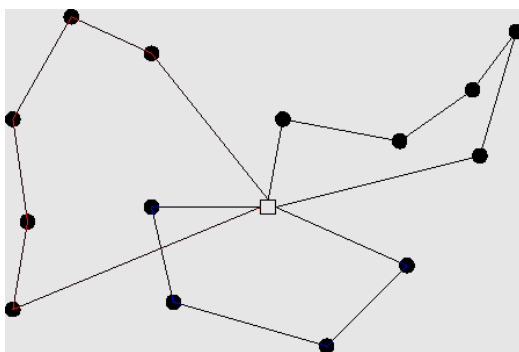


Рис. 1. Задача про листочки конюшини

Задачу VRP, за характерним схематичним зображенням шуканого результату (рис. 1), Дж. Данциг у цій статті назвав The Clover Leaf Problem (задача про листочки конюшини, на рисунку три «листочки»), підкресливши суть пошуку оптимальних рішень — кількості та конфігурацій контурів-«листочків», на що критично впливають значення вхідних даних: потенціал ТЗ ( $P$ ), координати  $(X, Y)$  і замовлення/запаси клієнтів ( $Z$ ).

Оскільки класична задача VRP та її варіанти за обчислювальними властивостями є NP-повними [6–8], а це надзвичайно високі системні вимоги до обчислювачів, зазвичай, спеціальними програмними засобами для її розв'язання розробляють

<sup>1</sup> на той час єдиний можливий аналітичний засіб

певні евристичні, а з-за відомої «проблемної» властивості ЗК про  $\frac{1}{2}n!$  її допустимих розв'язків, майже завжди за заданим користувачем лімітом машинного часу знайдений розв'язок є субоптимальним (near-best solution). Цей підхід грамотний і зрозумілий для практики, але недосяжний для більшості колективів дослідників, у першу чергу, університетів і бізнес-шкіл, не кажучи про звичайні сервісні центри, щодо придбання та кваліфікованого використання спеціалізованого софтверу, який потребує неабиякого хардверу<sup>2</sup>.

Тож для реальних навчально-дослідницьких цілей, без програмування, хоча і з обмеженими значеннями  $n$  та за лімітом машинного часу, можна застосувати точну за формулюванням модель MILP, яка якнайкраще ілюструє структуру математичної моделі, щоб отримати, зрозуміти та застосувати на практиці наблизений результат, користуючись доступними засобами-розв'язувачами в Excel (Solver, Analytic Solver, OpenSolver), з урахуванням їхніх системних обмежень на число змінних рішень та обмежень для них [9, 10].

### Приклад 1. Задача VRP (замовлення)

Транспортна мережа складається із 25 з'єднаних між собою вузлів (районні центри Київщини, до 17.07.2020), Біла Церква (центр, база ТЗ, кожен із потенціалом  $P$ ), інші 24 вузли — клієнти, задані своїми координатами та замовленнями (рис. 2).

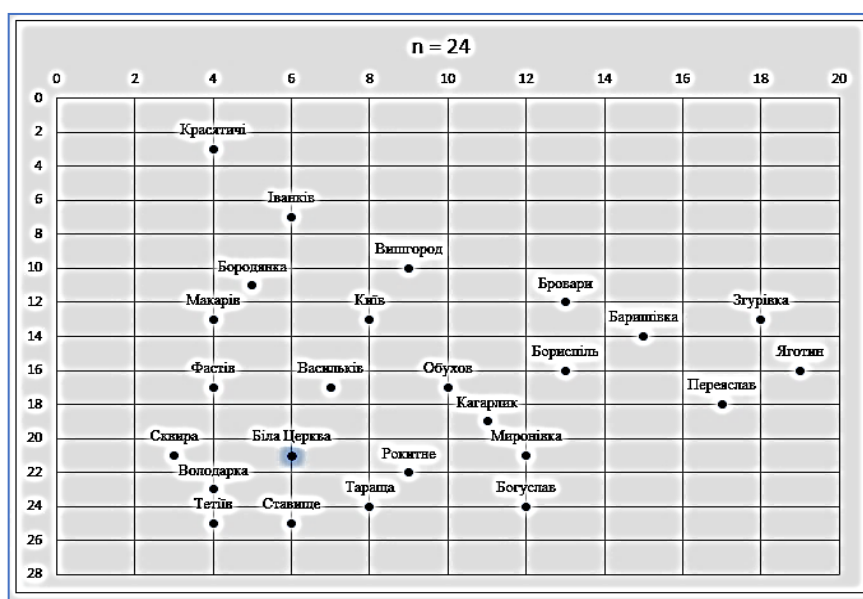


Рис. 2. Класична задача VRP (клієнти із замовленнями)

Розв'язати класичну задачу VRP, де усі клієнти мають замовлення ( $z_i$ ), за заданим значенням потенціалу ТЗ ( $P$ ), мета: задовольнити вимоги кожного клієнта, несучи при цьому мінімально можливі витрати на доставку. Для цього: кожному ТЗ призначається група клієнтів; визначаються: зважена послідовність їхнього

<sup>2</sup> є приклад таких досліджень, де застосовано кластер із 27 12-ядерних обчислювачів із відповідним системним і прикладним ПЗ

відвідування та значення потоків на кожній  $(i, j)$ -й ділянці контуру, де для кожного  $i$ -го вузла:  $f_{вих}(i) = f_{вх}(i) - z_i$ , тоді ланцюг потоків уздовж визначеного контуру строго спадний.

Входи: координати  $(x_i, y_i)$ , замовлення  $(z_i)$ ,  $i = 1, \dots, 25$ ; потенціал ТЗ  $(P)$ .

$$\max(z_i) = 12$$

$$\sum_{i=1}^{24} z_i = 200$$

$$12 \leq P \leq 200.$$

$$\text{Обчислити: } D = \{d_{ij}\}, d_{ij} = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)^{0.5}, L = \{l_{ij}\}, l_{ij} = f_{ij} - Px_{ij}.$$

### Задача оптимізації

Знайти:  $X = \{x_{ij}\}$ ,  $F = \{f_{ij}\}$ .

ЦФ:  $DX \rightarrow \min$ .

За обмежень:

$$\sum_{i=2}^{25} x_{ij} = 1, j = 1, \dots, 25$$

$$\sum_{j=2}^{25} x_{ij} = 1, i = 1, \dots, 25$$

$$\sum_{i=1}^{25} f_{ij} - \sum_{j=1}^{25} f_{ij} = z_i, i = 2, \dots, 25; j = 2, \dots, 25$$

$$l_{ij} \leq 0$$

$$x_{ij} \in (0/1), f_{ij} \geq 0.$$

Таблична модель:

— шуканих змінних:  $2 \times 25^2 = 1250$ ;

— обмежень:  $2 \times 25^2 + 3 \times 25 = 1325$ ;

— засіб: OpenSolver. Time Limit = 300 с.

Варіант 1.1.  $P = 50$  (рис. 3).

$k = 5$ .  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) = (44, 46, 46, 46, 18)$ .

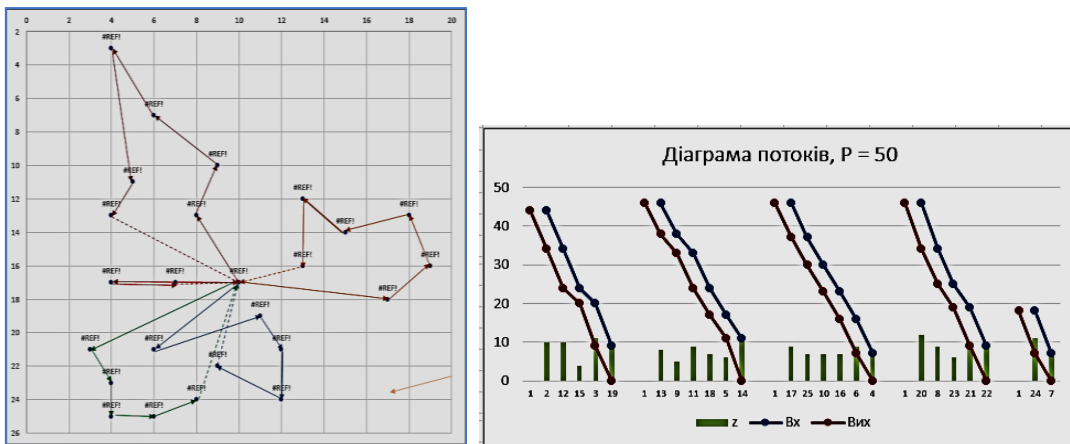


Рис. 3. Результат ( $P = 50$ , 5 контурів)

Субконтури:

K1: 1→2→12→15→3→19→1;

K2: 1→13→9→11→18→5→14→1;

K3: 1→17→25→10→16→6→4→1;

K4: 1→20→8→23→21→22→1;

K5: 1→24→7→1.

Модель МІЛР дозволяє адаптувати розрахунки до бажаних зовнішніх умов, заміною знайдених значень змінних рішень ( $x_{ij}, f_{ij}$ ) шляхом введення додаткових обмежень.

Варіант 1.2.  $P = 125$  (рис. 4).

Умова: включити в отриманий контур (рис. 4,а) ділянку Київ-Обухів (13-2) уведенням обмеження:  $x_{13,2} = 1$ , результат (рис. 4,б):

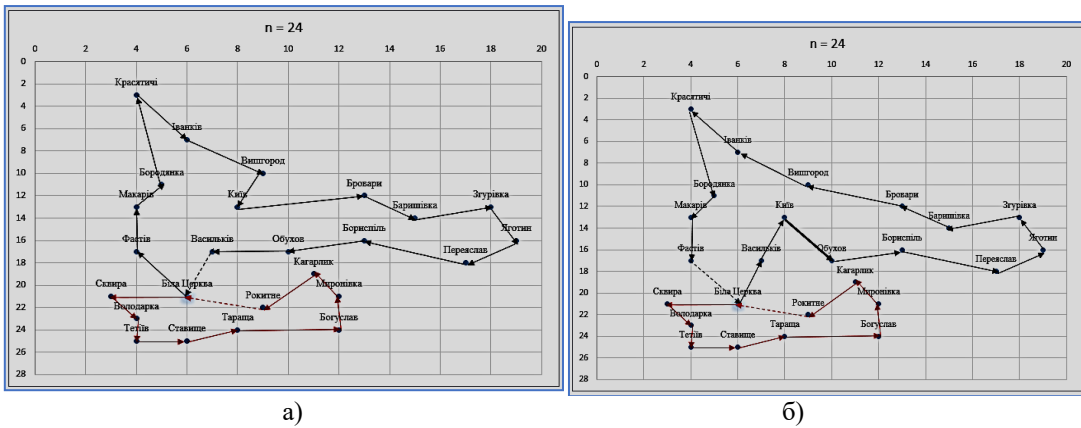


Рис. 4. Результат ( $P = 125$ , 2 контури)

Варіант 1.3.  $P = 200$  (рис. 5).

Контур:

1→7→24→14→5→18→11→9→13→6→16→10→25→17→4→2→12→15→3→19→22→21→23→8→20→1

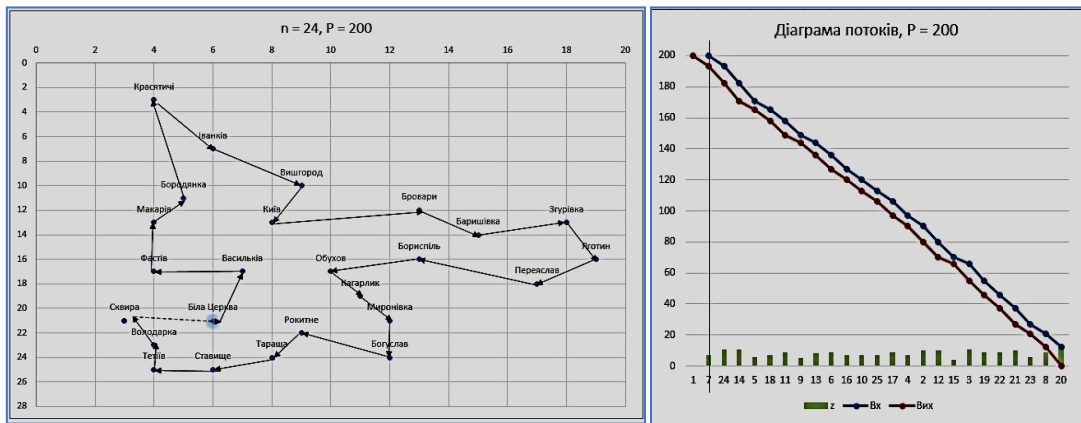


Рис. 5. Результат ( $P = 200$ , один контур)

## Приклад 2. Задача VRP (замовлення/запаси)

У цій задачі є відмінність — операція «зберігання, запас» як альтернатива операції «замовлення», де значення  $z_i < 0$  запас ресурсу  $i$ -го клієнта.

Кожному ТЗ призначається група клієнтів, визначаються послідовність їхнього відвідування та значення потоків на кожній  $(i, j)$ -й ділянці контуру, причому, для  $i$ -го вузла із запасом:  $f_{вих}(i) = f_{вх}(i) + z_i, f_{вих}(i) > f_{вх}(i)$ , і хоча ланцюг потоків уздовж визначеного контуру загалом спадний, але негладкий, пилкоподібний, де межують відносини  $f_{вих}(i) < f_{вх}(i)$  та  $f_{вих}(i) > f_{вх}(i)$ .

Треба розв'язати задачу VRP, де 14 клієнтів мають замовлення ( $z_i > 0$ ), 10 — запаси ( $z_i < 0$ ) за заданим значенням потенціалу ТЗ ( $P$ ).

Входи: координати  $(x_i, y_i)$ , замовлення/запаси  $(z_{ij})$ ,  $\max(z_i) = 12$ ;  $\sum(z_i < 0) = 80$ ;  $\sum(z_i > 0) = 120$ ;  $i = 2, \dots, 25, 12 \leq P \leq 40$  ( $120 - 80$ ).

Відмінність щодо виходу (результату): наявність територіально розподіленого ресурсу у вигляді запасів у певних клієнтів (80 од.) означає, що від центра тепер треба лише 40 од. для задоволення замовлень (120 од.).

Варіант 2.1.  $P = 12$  (рис. 6).

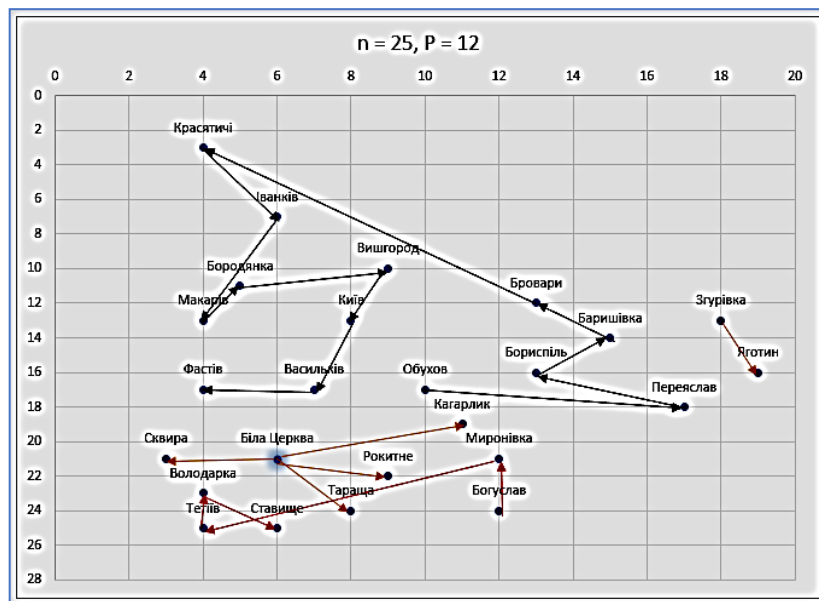


Рис. 6. Результат ( $P = 12$ , 4 субконтури)

### Аналіз результату

Коли в мережі є одночасно запаси та замовлення клієнтів, утворюється характерний для ЗК ефект — розрив контуру на виокремлені субконтури. Для 40 од. ресурсу в центрі із потенціалом ТЗ ( $P = 12$ ) утворено 4 субконтурів «центр-клієнт-центр»: Кагарлик (10), Рокитне (9), Тараща (9), Сквира (12), а 80 од. розподіленого ресурсу представлені трьома субконтурами місцевого значення.

Варіант 2.2.  $P = 40$  (рис. 7).

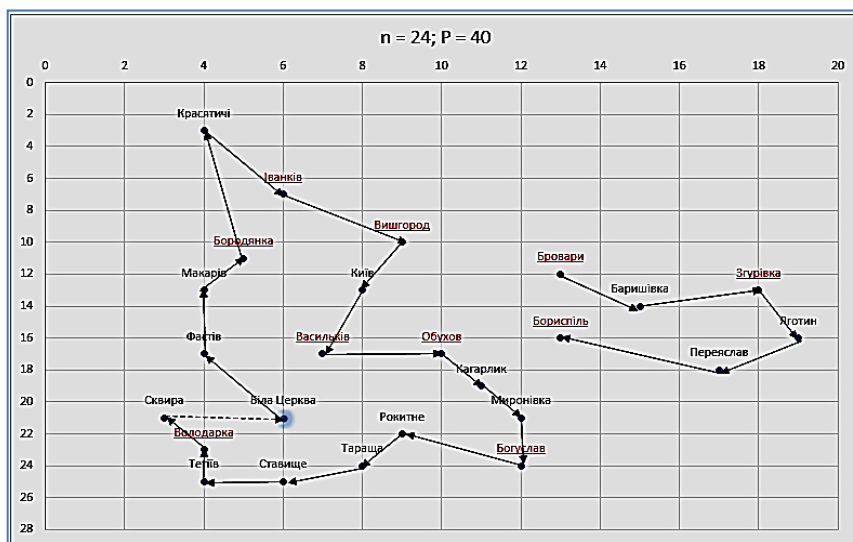


Рис. 7. Результат ( $P = 40$ , контур і субконтур)

Потенціал центра величиною 40 од. виявився недостатнім для утворення завершеного контуру із-за потокового обмеження  $f_{ii} \leq 40x_{ii}$ . Неохоплена група із 6 вузлів зберігає баланс: сума запасів = сумі замовлень, для завершення контуру потрібна «допомога» центра збільшенням значення  $P$  (для зміни правої частини цього обмеження).

Варіант 2.3.  $P = 47$  (рис. 8).

Контур:

1→7→24→14→5→18→11→9→13→6→16→10→25→17→4→2→12→15→3→19→22→21→23→8→20→1.

Розподіл потоків.

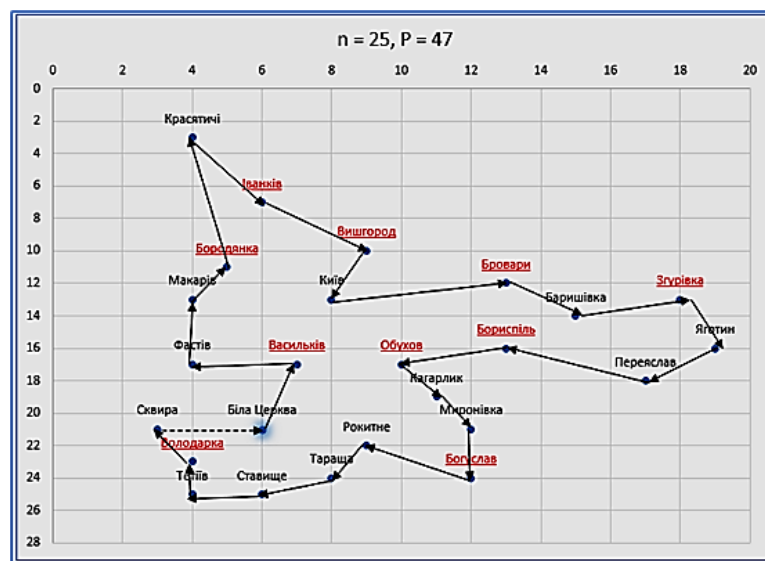


Рис. 8. Результат ( $P = 47$ , збалансований контур)

Хоча і у цьому випадку з центра в мережу поступає необхідні 40 од., контур розпочинається дугою 1 → 7 (Васильків, запас  $z_7 = -7$ ) із підсиленням на старті до 47 од., що дозволило «проштовхнути» потоки та побудувати збалансований контур (рис. 9).

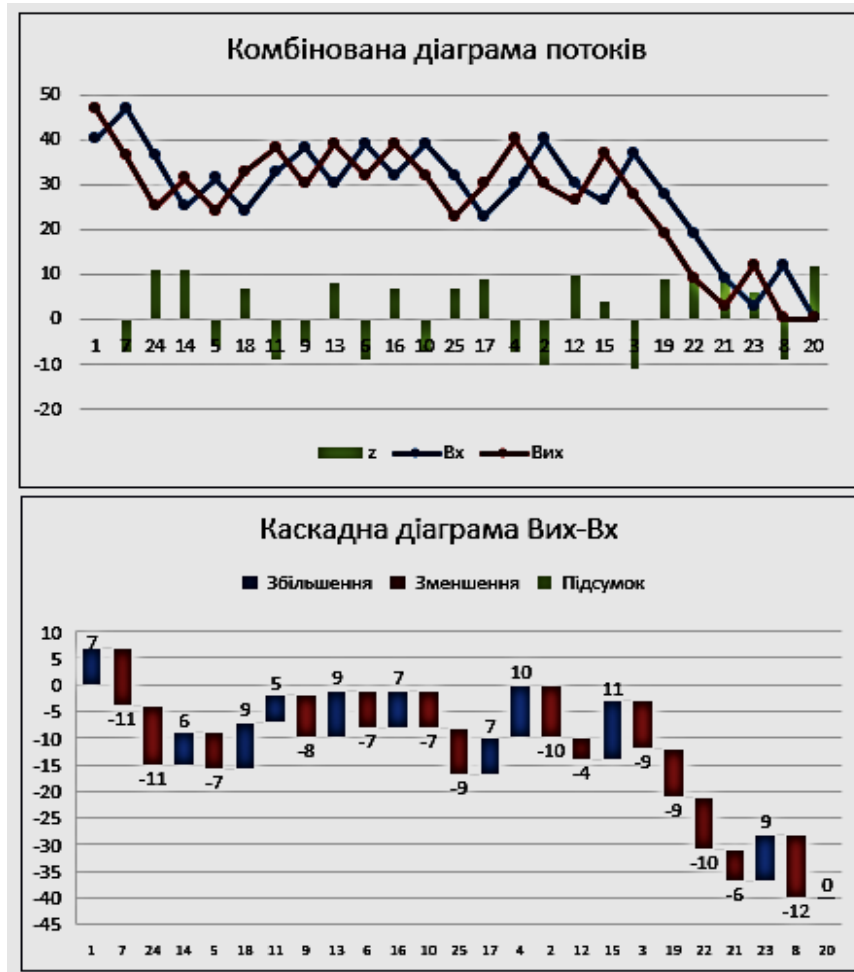


Рис. 9. Ланцюг потоків у збалансованому контурі

## Висновок

Класична VRP (із замовленнями) має строго спадаючу послідовність значень потоків, яку порівняно легко розділити на певну кількість субконтурів із такою ж спадною послідовністю залежно від значення потенціалу ТЗ. Зате VRP із замовленнями/запасами ресурсів у клієнтів не може мати таку послідовність, у ланцюгу потоків є одночасно зростання та спадання поточних значень, тому тут можливий єдиний контур вибором достатнього потенціалу ТЗ, або ж, за ситуацією, утворення декількох штучних субконтурів із неохоплених груп вузлів.

1. Dantzig G.B., Fulkerson R., Johnson J. Solution of a Large-Scale Traveling-Salesman Problem, *J. Operations Res. Soc. Am.* 1954. 2. P. 393–410.



2. Dantzig G.B., Ramser J.H. The Truck Dispatching Problem. *Management Science*. 1959. Vol. 6, No. 1. P. 80–91.
3. Haitao L. Optimization modeling for supply chain applications. World Scientific, 2023. 469 p.
4. Додонов О.Г., Кузьмичов А.І. Мережеві організаційні структури управління. Моделювання та візуалізація засобами Excel. Київ: Вид-во «Ліра-К», 2021. 299 с.
5. Гуляницький Л.Ф., Коткова А.А. До класифікації задач маршрутизації транспортних засобів. *Наук. вісн. УжДУ*. 2020. Вип. 36, № 1. С. 73–84.
6. Snyder L., Shen Z. Fundamentals of Supply Chain Theory. Wiley, 2019. 759 p.
7. Geunes J. Operations Planning. Mixed Integer Optimization Models. CRC Press, 2019. 213 p.
8. Кузьмичов А.І. Оптимізаційні методи і моделі. Практикум в Excel. Київ: АМУ, 2013. 438 с.
9. Ghiani G., Laporte G., Musmano R. Introduction to Logistics Systems Planning and Control. Wiley, 2004. 368 p.
10. Toth P., Vido D. (Eds.) The Vehicle Routing Problem. Siam, 2002. 367 p.

Надійшла до редакції 30.11.2023