

DOI: 10.35681/1560-9189.2020.22.4.225901

УДК 535.44, 535.421

**А. С. Лапчук, І. В. Горбов, О. В. Пригун,  
Є. М. Морозов, Т. Ю. Ключова, Ю. О. Бородін**  
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України  
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

## **Теорія зменшення спеклів у лазерному проекторі дуже довгим багатомодовим волокном**

*Проаналізовано ефективність зменшення спеклів стаціонарним багатомодовим оптоволоконном у лазерному проекторі. Розроблено та розраховано математичну модель для випадку дуже довгого оптоволоконна. Комп'ютерне моделювання і аналіз математичної моделі показали, що коефіцієнт зменшення спеклів може з точністю, придатною для інженерних розрахунків, бути апроксимований як лінійна функція квадратного кореня відношення числової апертури лазерного проектора та ока. Дуже велика числова апертура, яка на кілька сотень перевищує зіницю людського ока, необхідна для зменшення спеклів нижче чутливості людського ока. Це впливає з того факту, що декореляція в методі використовує лише радіальний напрямок для зменшення спеклів. Для підвищення ефективності методу необхідна його модифікація, де буде передбачено використання азимутального напрямку.*

**Ключові слова:** лазерний проектор, спекли, лазерні спекли, шум, зменшення спеклів, багатомодове оптоволоконно, оптичний хвилевод.

### **Вступ**

Лазери випромінюють високоякісні пучки світла і мають високу оптичну ефективність [1]. Високояскраві лазерні джерела світла з вузькою смугою випромінювання дозволяють отримувати яскраві, насичені кольорові зображення. Тому його застосування є дуже перспективним у високоякісному компактному лазерному проекторі [2]. Однак через високу когерентність лазерних пучків зображення, створюване лазерами, сильно модулюється спеклами [3]. Тому для широкого застосування лазерні проектори вимагають компактного пристрою для зменшення спеклів. Амплітуда спекл-шумів вимірюється контрастом спеклів  $C$ :

$$C = \sigma / \bar{I}, \quad (1)$$

де  $\sigma$  — це стандартне відхилення інтенсивності в зображенні однорідно освітленого екрана;  $\bar{I}$  усереднена інтенсивність освітлення в зображенні екрана.

© А. С. Лапчук, І. В. Горбов, О. В. Пригун, Є. М. Морозов, Т. Ю. Ключова, Ю. О. Бородін

У лазерних проекційних освітлювальних системах спекли істотно спотворюють інформацію про досліджуваний об'єкт, стаючи, таким чином, оптичним спекловим шумом. Для оцінки ефективності методів зменшення спеклових шумів застосовують коефіцієнт зменшення спеклів  $k$ , який визначається, як відношення контрасту спеклів до застосування методу  $C_0$  до контрасту після застосування  $C$ :

$$k = C_0 / C. \quad (2)$$

Як правило, без механізму зменшення спеклів неможливо одержати контраст спеклів нижче 0,3. Для отримання високоякісного зображення потрібен контраст спеклів  $C$  нижче 0,03 [4]. Отже, коефіцієнт зменшення спеклів лазерного проектора щонайменше повинен бути більшим за 10.

Система зменшення спеклів зазвичай заснована на усередненні спекл-шуму шляхом зменшення когерентності лазерного пучка, що освітлює екран [3], або ж за допомогою рухомого екрана [5]. Використання рухомого екрана не завжди можливо (для мобільних проекторів) і не є хорошим інженерним вирішенням проблеми, оскільки вимагає швидкого переміщення великого екрана. Є три можливості зменшити когерентність лазерного променя [3]:

- 1) зменшення поляризаційної когерентності;
- 2) зменшення часової когерентності;
- 3) зменшення просторової когерентності.

Суть методу зі зменшенням просторової когерентності полягає в тому, що лазерні пучки необхідно розбити на декорельовані лазерні пучки, які освітлюють екран під кутами, що продукують декорельовані спеклові поля. У цьому випадку коефіцієнт зменшення спеклів легко обрахувати за формулою

$$k = \sqrt{(N)},$$

де  $N$  — це кількість декорельованих лазерних пучків. Неважко зрозуміти, що метод повинен використовувати принаймні 100 декорельованих між собою пучків для зменшення контрасту спеклів для створення вільного від спеклів зображення.

Механічно зміщуваний спеціальний дифракційний оптичний елемент (ДОЕ), що просторово розділяє лазерний промінь на декілька пучків, може бути використаний для отримання необхідної кількості декорельованих пучків, які освітлюють екран під кутами, що забезпечують декореляцію спеклових структур (просторова декогерентність) [6–11]. Цей метод дозволяє отримати необхідну кількість декорельованих спеклових структур (кілька сотень). Однак для реалізації цього методу потрібен активний рухомий ДОЕ. Механічний рух, як правило, не є бажаним в електрооптичних пристроях. З іншого боку є динамічні ДОЕ без механічного руху, що засновані на рідких кристалах, але швидкість електричного перемикавання рідких кристалів не є достатньою для динамічної швидкості ДОЕ, щоб отримати на їхній основі потрібний рівень ефекту зменшення спеклів.

Існує підхід до зменшення спеклів, який не потребує активних оптичних елементів [3, 12, 16, 17]. Він заснований на розділенні лазерного променя на багато підпучків, які мають різну довжину оптичного шляху, більшою за довжину декореляції лазерного випромінювання, а після цього направляють їх на екран під декорельованими кутами, щоб отримати необхідний рівень спеклів. Різниця в швидкості розповсюдження хвилеводних мод може бути використана для поділу одного лазерного пучка на багато декорельованих пучків, а після цього застосована для освітлення екрана під декорельованими кутами [16].

Через інтерференцію полів хвилеводних мод на дальньому кінці оптоволоконна виникають об'єктивні спекли, які проектується об'єктивом проектора на екран. Теорія для статистики об'єктивних спеклів добре відома [3], і показано, що можна знизити рівень цих спеклів практично до нуля, обравши довге багатомодове оптоволоконно з достатньо великою числовою апертурою [16]. Передбачалося, що метод може бути використаний в лазерному проекторі для зменшення контрасту спеклів на екрані нижче контрастної чутливості людського ока [13]. Однак нами було показано [14, 15], що лазерний пучок світла, який вийшов з дальнього кінця хвилевода має в перетині області когерентності у вигляді вузьких кілець у просторі кутів поширення (в просторовій площині Фур'є лазерного пучка). І тому цей метод є 1D-метод, що робить для нього неможливим досягнення зменшення спеклів нижче контрастної чутливості людського ока. У [14] була виведена проста формула для контрасту спеклів цього методу, що базується лише на якісній оцінці кута декореляції.

Нижче ми ставимо за мету отримати більш точну теоретично-математичну модель виникнення та зменшення спеклів, засновану на скалярному наближенні Френеля для дифракції і поширення світлового пучка. Змоделювати та математично описати загальний випадок, коли існують як об'єктивні, так і суб'єктивні спекли, є складною задачею. Тому для спрощення цієї задачі ми хочемо вивести формулу для дуже довгого оптоволоконна з великою числовою апертурою. Під дуже довгим оптоволоконном з великою числовою апертурою тут мається на увазі таке оптоволоконно, довжини якого є достатньою для зменшення об'єктивних спеклів до рівня, який не впливає на величину суб'єктивних спеклів у зображенні проектора і створює декореляцію полів хвилеводних мод на дальньому кінці оптоволоконна, які освітлюють екран зі значно меншою різницею кутів ніж кутова роздільна здатність ока людини.

## Оптична схема

Оптична схема лазерного проектора з багатомодовим волокном показана на рис. 1. Однак проміжна площина зображення не є важливою для зменшення спеклів, і тому для спрощення аналізу ефективності зменшення спеклів цю оптичну схему можна замінити на більш просту, що показана на рис. 2. Щоби бути еквівалентною для механізму зменшення спеклів, обидві оптичні схеми повинні мати однакову числову апертуру лазерного об'єктива та ока на екрані.

Як було сказано вище, метод є одновимірним, і тому кут між віссю оптоволоконна та напрямком поширення світла можна представити як безперервний випадок декореляції одного параметра. Тому для контрасту спеклів можна записати через декореляційну функцію наступним чином [3]:

$$C = \frac{\sqrt{\int_0^{a \sin(NA)} d\theta \int_0^{a \sin(NA) - x} I(\theta) I(\theta + \theta') b^2(\theta, \theta') d\theta' / 2}}{\int_0^{a \sin(NA)} I(\theta) d\theta}, \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{2 \int_0^{a \sin(NA)} d\theta \int_0^{a \sin(NA) - \theta} I\theta I(\theta + \Delta\theta) b^2(\theta, \theta + \Delta\theta) d\Delta\theta / 2}}{\int_0^{a \sin(NA)} I(\theta) d\theta},$$

де  $NA$  — числова апертура лазерного променя;  $I(\theta)$  — інтенсивності світла, що випромінюється під тілесним кутом  $\sin(\theta)d\theta$  (див. рис. 2).

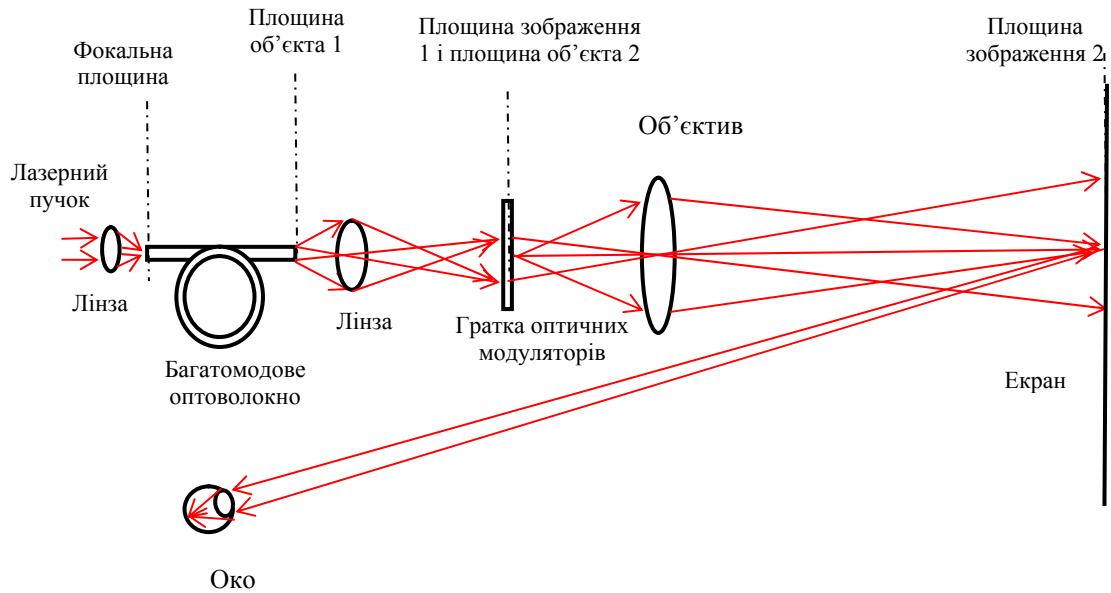


Рис. 1. Принципова оптична схема лазерного проектора з багатомодовим волокном для зменшення спеклів

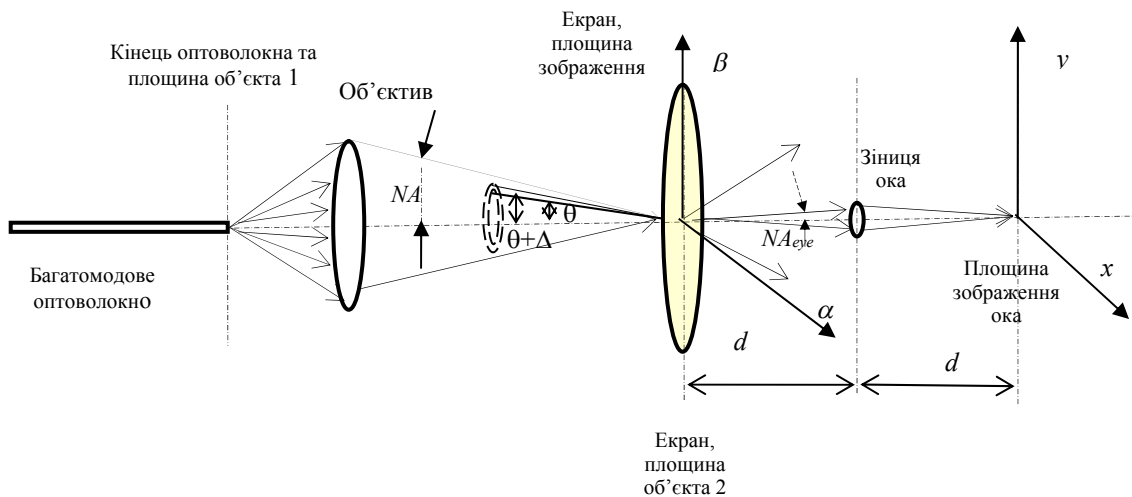


Рис. 2. Оптична схема з оптичним збільшенням  $M = 1$ . Робиться припущення що  $NA \gg NA_{eye}$ , а також що оптоволокно є достатньо довгим для зменшення об'єктивних спеклів нижче порогового рівня

Для спрощення формули без будь-яких втрат точності ми будемо вважати, що збільшення зображення  $M$  оком або камерою дорівнює  $M = 1$  [3]. Зображення, що виникає на ретині ока людини в цьому випадку можна записати як

$$A(x, y) = \int K(x + \alpha, y + \beta) a(\alpha, \beta) d\alpha d\beta, \quad (4)$$

де  $K(x + \alpha, y + \beta)$  — функція точкового джерела оптичної системи.

Тепер оцінимо кореляцію інтенсивності двох зображень в оці від двох пучків, кожен з яких висвітлює екран з набором хвиль, що розповсюджуються під за-

даним кутом до оптичної осі (напрямки що вказують на вершину конуса з цим кутом). Зображення екрана в оці, освітленого таким пучком світла, яке поширюється під деяким кутом до оптичної осі оптоволокна (когерентні пучки лазерного освітлення, що виходять з багатомодового волокна), можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned}
 I(x, y, \theta) &= \int_{\alpha} \int_{\beta} \int_0^{2\pi} K(x + \alpha, y + \beta) a(\alpha, \beta, \theta, \varphi) t(\alpha, \beta, \theta, \varphi) d\alpha d\beta d\varphi \times \\
 &\times \int_{\alpha'} \int_{\beta'} \int_0^{2\pi} K^*(x + \alpha', y + \beta') a^*(\alpha', \beta', \theta, \varphi') t^*(\alpha', \beta', \theta, \varphi') d\alpha' d\beta' d\varphi', \\
 I(x, y, \theta + \Delta\theta) &= \int_{\alpha''} \int_{\beta''} \int_0^{2\pi} K(x + \alpha'', y + \beta'') \exp(i\psi) a(\alpha'', \beta'', \theta + \Delta\theta, \varphi_1) t(\alpha'', \beta'', \theta + \Delta\theta, \varphi_1) d\alpha'' d\beta'' d\varphi_1 \times \\
 &\times \int_{\alpha'''} \int_{\beta'''} \int_0^{2\pi} K^*(x + \alpha''', y + \beta''') \exp(-i\psi) a^*(\alpha''', \beta''', \theta + \Delta\theta, \varphi_1') t^*(\alpha''', \beta''', \theta + \Delta\theta, \varphi_1') d\alpha''' d\beta''' d\varphi_1',
 \end{aligned} \tag{5}$$

де тут і в подальшому надрядкові зірочки позначають комплексне спряження:

$$a(\alpha, \beta, \theta, \varphi_1) = A(\theta, \varphi) \exp(i\omega t - ik \sin(\theta)(\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)), \tag{6}$$

$$a(\alpha, \beta, \theta + \Delta\theta, \varphi_1) = A(\theta + \Delta\theta, \varphi) \exp(i\omega t - ik \sin(\theta + \Delta\theta)(\alpha \cos \varphi_1 + \beta \sin \varphi_1)). \tag{7}$$

Ми зможемо розрахувати контраст суб'єктивних спеклів у зображенні світлової плями на екрані, якщо будемо мати функцію автокореляції інтенсивності полів спеклів від пучків світла, що освітлюють його під різним кутом  $\theta$ . Але ми не можемо використовувати тут кореляційну функцію амплітуди оптичних полів, оскільки ми зробили припущення, що поля створені пучками, які виходять з оптоволокна з різними кутами падіння  $\theta$ , є декорельованими. Кореляція тут виникає внаслідок того, що напруженість спекл-поля корелюється, якщо два пучки мають різницю в кутах падіння на екран, меншою за кути числової апертури ока на екрані.

Функція перехресної кореляції напруженості спеклових полів у площині ретини ока може бути представлена у зручній для обчислення контрасту спеклів формі:

$$\frac{\langle I(x, y, \theta) I(x, y, \theta + \Delta\theta) \rangle}{\langle I(x, y, \theta) \rangle \langle I(x, y, \theta) \rangle} = 1 + |b(\theta, \theta + \Delta\theta)|^2, \tag{8}$$

де кутові дужки  $\langle \dots \rangle$  означають усереднення по ансамблю.

Використовуючи рівняння (6) і (7), кореляційну функцію для інтенсивності двох спеклових полів, випромінюваних під різним кутом  $\theta$  від дальнього кінця багатомодового волокна, можна записати наступним чином:

$$\begin{aligned}
 \langle I(x, y, \theta) I(x, y, \theta + \Delta\theta) \rangle &= \\
 &= \int_{\alpha} \int_{\beta} \int_0^{2\pi} \int_{\alpha'} \int_{\beta'} \int_0^{2\pi} \int_{\alpha''} \int_{\beta''} \int_0^{2\pi} \int_{\alpha'''} \int_{\beta'''} \int_0^{2\pi} \int_{\alpha''''} \int_{\beta''''} \int_0^{2\pi} \int_{\alpha'''''} \int_{\beta'''''} \int_0^{2\pi} \\
 &\left\{ \begin{aligned}
 &K(x + \alpha, y + \beta) K^*(x + \alpha', y + \beta') K(x + \alpha'', y + \beta'') K^*(x + \alpha''', y + \beta''') \times \\
 &\times \langle t(\alpha, \beta, \theta, \varphi) t^*(\alpha', \beta', \theta, \varphi') t(\alpha'', \beta'', \theta + \Delta\theta, \varphi_1) t^*(\alpha''', \beta''', \theta + \Delta\theta, \varphi_1') \rangle \times \\
 &\times \langle a(\alpha, \beta, \theta, \varphi) a^*(\alpha', \beta', \theta, \varphi') a(\alpha'', \beta'', \theta + \Delta\theta, \varphi_1) a^*(\alpha''', \beta''', \theta + \Delta\theta, \varphi_1') \rangle \times \\
 &d\alpha d\beta d\varphi d\alpha' d\beta' d\varphi' d\alpha'' d\beta'' d\varphi'' d\alpha''' d\beta''' d\varphi''' d\alpha'''' d\beta'''' d\varphi'''' d\alpha''''' d\beta''''' d\varphi'''''
 \end{aligned} \right\} \tag{9}
 \end{aligned}$$

Тут і подальшому границі інтегрування по  $\varphi$  (з будь-якими індексами та штрихами) будуть завжди в межах від 0 до  $2\pi$ , а по  $\alpha$  та  $\beta$  (з будь-якими індексами і штрихами) в межах від  $-\infty$  до  $+\infty$ , і це явно не буде показано у формулах (для отримання більш компактних виразів). У рівнянні (9) враховано, що усереднення по ансамблю включає два незалежних усереднення:

- 1) усереднення по світлу з далекого кінця оптоволоконна;
- 2) усереднення за розсіюванням світла від екрана.

Оскільки ці два усереднення зумовлені різним фактором, що робить їх незалежними, тому ми робимо два незалежних усереднення і, отже, можемо використовувати дві дужки в правій частині рівняння (9).

Ми будемо використовувати рівняння (6), (7) для обчислення падаючого під деяким кутом оптичного поля екрана. У правильно відкаліброваній оптичній системі інтенсивність світла, що випромінюється на виході з далекого кінця волокна, повинна мати кругову симетрію (інтенсивність світла не залежить від  $\varphi$ ), і інтенсивність випромінювання є плавною функцією  $\theta$ , а кореляційна функція швидко зменшується до нуля зі збільшенням  $\Delta$  і, отже, при обчисленні кореляції ми можемо покласти:

$$|A(\theta + \Delta\theta_1)|^2 = |A(\theta)|^2.$$

Використовуючи всі вищенаведені наближення, усереднення по ансамблю можна у випадку  $\Delta\theta \neq 0$  записати наступним чином:

$$\begin{aligned} & \langle a(\alpha, \beta, \theta, \varphi) a^*(\alpha', \beta', \theta, \varphi') a(\alpha'', \beta'', \theta + \Delta\theta, \varphi_1) a^*(\alpha''', \beta''', \theta + \Delta\theta, \varphi_1') \rangle = \\ & = \left\langle \left[ A(\theta, \varphi) \exp(i\omega t - ik \sin(\theta)(\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)) A^*(\theta, \varphi') \exp(-i\omega t + ik \sin(\theta)(\alpha' \cos \varphi' + \beta' \sin \varphi')) \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[ A(\theta + \Delta\theta, \varphi_1) \exp(i\omega t - ik \sin(\theta + \Delta\theta)(\alpha'' \cos \varphi_1 + \beta'' \sin \varphi_1)) A^*(\theta + \Delta\theta, \varphi_1') \exp(-i\omega t + ik \sin(\theta)(\alpha''' \cos \varphi_1' + \beta''' \sin \varphi_1')) \right] \right\rangle = \\ & = \left\langle \left[ A(\theta, \varphi) A^*(\theta, \varphi') \exp(i\omega t - ik \sin(\theta)(\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)) \exp(-i\omega t + ik \sin(\theta)(\alpha' \cos \varphi' + \beta' \sin \varphi')) \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[ A(\theta + \Delta\theta, \varphi_1) A^*(\theta + \Delta\theta, \varphi_1') \exp(i\omega t - ik \sin(\theta + \Delta\theta)(\alpha'' \cos \varphi_1 + \beta'' \sin \varphi_1)) \exp(-i\omega t + ik \sin(\theta + \Delta\theta)(\alpha''' \cos \varphi_1' + \beta''' \sin \varphi_1')) \right] \right\rangle = (10) \\ & = |A(\theta, \varphi)|^2 \delta(\varphi - \varphi') \exp(-ik \sin(\theta)(\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)) \exp(ik \sin(\theta)(\alpha' \cos \varphi' + \beta' \sin \varphi')) \times \\ & \times |A(\theta + \Delta\theta, \varphi_1)|^2 \delta(\varphi_1 - \varphi_1') \exp(-ik \sin(\theta + \Delta\theta)(\alpha'' \cos \varphi_1 + \beta'' \sin \varphi_1)) \exp(ik \sin(\theta + \Delta\theta)(\alpha''' \cos \varphi_1' + \beta''' \sin \varphi_1')) = \\ & = |A(\theta)|^2 \delta(\varphi - \varphi') \exp(-ik \sin(\theta)(\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)) \exp(ik \sin(\theta)(\alpha' \cos \varphi' + \beta' \sin \varphi')) \times \\ & \times |A(\theta)|^2 \delta(\varphi_1 - \varphi_1') \exp(-ik \sin(\theta + \Delta\theta)(\alpha'' \cos \varphi_1 + \beta'' \sin \varphi_1)) \exp(ik \sin(\theta + \Delta\theta)(\alpha''' \cos \varphi_1' + \beta''' \sin \varphi_1')) \end{aligned}$$

А для випадку  $\Delta\theta = 0$ :

$$\begin{aligned} & \langle a(\alpha, \beta, \theta, \varphi) a^*(\alpha', \beta', \theta, \varphi') a(\alpha'', \beta'', \theta, \varphi_1) a^*(\alpha''', \beta''', \theta, \varphi_1') \rangle = \\ & = |A(\theta, \varphi)|^2 \delta(\varphi - \varphi') \exp(-ik \sin(\theta)(\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)) \exp(ik \sin(\theta)(\alpha' \cos \varphi' + \beta' \sin \varphi')) \times \\ & \times |A(\theta, \varphi_1)|^2 (\varphi_1 - \varphi_1') \exp(-ik \sin(\theta)(\alpha'' \cos \varphi_1 + \beta'' \sin \varphi_1)) \exp(ik \sin(\theta)(\alpha''' \cos \varphi_1' + \beta''' \sin \varphi_1')) + (11) \\ & + |A(\theta, \varphi)|^2 \delta(\varphi - \varphi_1') \exp(-ik \sin(\theta)(\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)) \exp(+ik \sin(\theta)(\alpha''' \cos \varphi + \beta''' \sin \varphi)) \times \\ & \times |A(\theta, \varphi_1)|^2 \delta(\varphi_1 - \varphi') \exp(-ik \sin(\theta)(\alpha'' \cos \varphi_1 + \beta'' \sin \varphi_1)) \exp(ik \sin(\theta)(\alpha' \cos \varphi' + \beta' \sin \varphi')) \end{aligned}$$

Кореляційні рівняння (10), (11) отримано в наближенні, де набори хвилеводних мод, які випромінюються під різними кутами нахилу  $\theta$  до оптичної осі, є декорельованими, а поля наборів мод із заданим  $\theta$  є когерентними та швидко хаотично змінюються при зміні кута  $\varphi$  (внаслідок багатомодовості оптоволоконна та випадкової фази поля кожної моди (модель дуже довгого багатомодового волокна)).

Тому кореляцію полів за напрямками  $\varphi$  можна апроксимувати як дельта-функцією від цього кута.

Кореляцію амплітуди поля світла, розсіяного екраном, можна записати, припускаючи зазвичай, що шорсткість поверхні приводить до зміни висоти рельєфу екрана, значно більшої за довжину хвилі лазера, довжина декореляції поверхні екрана є значно меншою, ніж просторова роздільна здатність ока, що сфокусовано на екрані:

$$\left\langle a(\alpha, \beta, \theta, \varphi) t(\alpha, \beta, \theta, \varphi) a^*(\alpha', \beta', \theta, \varphi') t^*(\alpha', \beta', \theta, \varphi') \times \right. \\ \left. \times a(\alpha'', \beta'', \theta + \Delta\theta, \varphi_1) t(\alpha'', \beta'', \theta + \Delta\theta, \varphi_1) a^*(\alpha''', \beta''', \theta + \Delta\theta, \varphi_1') t^*(\alpha''', \beta''', \theta + \Delta\theta, \varphi_1') \right\rangle = \\ = |t|^2 (\alpha, \beta, \theta, \varphi) a^*(\alpha', \beta', \theta, \varphi') \delta(\alpha - \alpha') \delta(\beta - \beta') |t|^2 a(\alpha'', \beta'', \theta + \Delta\theta, \varphi_1) a^*(\alpha''', \beta''', \theta + \Delta\theta, \varphi_1') \delta(\alpha'' - \alpha''') \delta(\beta'' - \beta''') + (12) \\ + |t|^2 a(\alpha, \beta, \theta, \varphi) a^*(\alpha''', \beta''', \theta + \Delta\theta, \varphi_1') \delta(\alpha - \alpha''') \delta(\beta - \beta''') |t|^2 a(\alpha'', \beta'', \theta + \Delta\theta, \varphi_1) a^*(\alpha', \beta', \theta, \varphi') \delta(\alpha' - \alpha'') \delta(\beta' - \beta'')$$

У рівнянні (12) передбачається, що абсолютне значення коефіцієнта відбиття (або передачі) екрана не залежить від кута падіння. Це є обґрунтованим припущенням для високоякісного екрана, який забезпечує для усіх глядачів зображення однакової яскравості. Якщо вставити рівняння (12) у рівняння (9), отримуємо наступну формулу для функції крос-кореляції інтенсивностей:

$$\langle I(x, y, \theta) I(x, y, \theta + \Delta\theta) \rangle = \\ \left[ \int K(x + \alpha, y + \beta) d\alpha d\beta d\varphi \int K^*(x + \alpha', y + \beta') d\alpha' d\beta' d\varphi' \int K(x + \alpha'', y + \beta'') d\alpha'' d\beta'' d\varphi'' \times \right. \\ \left. \times \int \left[ \int K^*(x + \alpha''', y + \beta''') d\alpha''' d\beta''' d\varphi''' \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[ |t|^4 a(\alpha, \beta, \theta, \varphi) a^*(\alpha', \beta', \theta, \varphi') a(\alpha'', \beta'', \theta + \Delta\theta, \varphi_1) a^*(\alpha''', \beta''', \theta + \Delta\theta, \varphi_1') \delta(\alpha - \alpha') \delta(\beta - \beta') \delta(\alpha'' - \alpha''') \delta(\beta'' - \beta''') + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. |t|^4 a(\alpha, \beta, \theta, \varphi) a^*(\alpha', \beta', \theta, \varphi') a(\alpha'', \beta'', \theta + \Delta\theta, \varphi_1) a^*(\alpha''', \beta''', \theta + \Delta\theta, \varphi_1') \delta(\alpha - \alpha''') \delta(\beta - \beta''') \delta(\alpha' - \alpha'') \delta(\beta' - \beta'') \right] d\alpha''' d\beta''' d\varphi''' \right] \right] \quad (13)$$

Для компактності виразів у рівнянні (13) трикратні інтеграли по  $\alpha$ ,  $\beta$  та  $\varphi$  і двократні по  $\alpha$ ,  $\beta$  (з будь-якими однаковими індексами та штрихами) записуються через значок однократного інтегралу. Ці спрощені позначення багатократних інтегралів будуть використовуватися нижче по тексту з метою отримання компактних виразів.

За допомогою (10) рівняння (13) можна переписати так:

$$\langle I(x, y, \theta) I(x, y, \theta + \Delta\theta) \rangle = \\ \left\{ \int |K(x + \alpha, y + \beta)|^2 A^2(\theta) \delta(\varphi - \varphi') d\alpha d\beta d\varphi d\varphi' \times \int |K(x + \alpha'', y + \beta'')|^2 A^2(\theta) \delta(\varphi - \varphi'') d\alpha'' d\beta'' d\varphi'' d\varphi''', \right. \\ \left. + \int |K(x + \alpha, y + \beta)|^2 d\alpha d\beta d\varphi d\varphi' \times \right. \\ \left. \times \int \left\{ |K(x + \alpha', y + \beta')|^2 |A(\theta)|^2 |A(\theta)|^2 \exp(ik\alpha(\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin(\theta)) + ik\beta(\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin(\theta))) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp(-ik\alpha'(\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin(\theta)) + ik\beta'(\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin(\theta))) \delta(\varphi - \varphi') \delta(\varphi_1 - \varphi_1') d\varphi_1 d\varphi_1' d\alpha' d\beta' \right\} \right. \\ \left. + \int |K(x + \alpha, y + \beta)|^2 A^2(\theta) d\alpha d\beta \times \int |K(x + \alpha'', y + \beta'')|^2 A^2(\theta) d\alpha'' d\beta'' + \right. \\ \left. + \int \left\{ |K(x + \alpha, y + \beta)|^2 \exp(ik\alpha(\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin(\theta)) + ik\beta(\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin(\theta))) d\alpha d\beta \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int |K(x + \alpha', y + \beta')|^2 |A(\theta)|^2 |A(\theta)|^2 (\exp(-ik\alpha'(\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin(\theta)) - ik\beta'(\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin(\theta)))) d\alpha' d\beta' \right\} \right\} \quad (14)$$

Для обрахунку ефекту зменшення спеклів ми можемо обрати будь-яку освітлену частину екрана. Для простоти ми беремо центральну частину, тобто  $x = 0$  та  $y = 0$ . У цьому випадку ми можемо переписати рівняння (14) як

$$\begin{aligned}
 & \langle I(x, y, \theta) I(x, y, \theta + \Delta\theta) \rangle = \\
 & = (2\pi)^2 |t|^4 \left\{ \begin{aligned} & \left[ \int |K(\alpha, \beta)|^2 A^2(\theta) d\alpha d\beta \times \right. \\ & \left. \times \int |K(\alpha', \beta')|^2 A^2(\theta) d\alpha' d\beta' \right] + \\ & \left[ \int |K(\alpha, y\beta)|^2 \exp(ik\alpha(\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin(\theta)) + ik\beta(\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin(\theta))) d\alpha d\beta \times \right. \\ & \left. + \int |K(\alpha', \beta')|^2 |A(\theta)|^2 |A(\theta')|^2 \left( \exp(-ik\alpha'(\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin(\theta)) - ik\beta'(\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin(\theta))) \right) d\alpha' d\beta' \right] \end{aligned} \right\} \quad (15)
 \end{aligned}$$

Рівняння (15) записано в декартовій системі координат, яка не враховує симетрію оптичної системи відносно оптичної осі. Тому краще переписати рівняння (15) у циліндричній системі координат з віссю циліндра, розміщеною вздовж оптичної осі. У цьому випадку ми маємо

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \alpha = \rho \cdot \cos(\varphi), \quad \beta = \rho \cdot \sin(\varphi),$$

і рівняння (15) можна переписати наступним чином:

$$\begin{aligned}
 b(\theta, \Delta\theta) &= \frac{\int_{\alpha, \beta} |K(\alpha, \beta)|^2 |A(\theta)|^2 \exp(ik\alpha(\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin(\theta)) + ik\beta(\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin(\theta))) d\alpha d\beta}{\int_{\alpha, \beta} |K(\alpha, \beta)|^2 |A\theta|^2 d\alpha d\beta} = \\
 &= \frac{\int_{\rho=0}^{\infty} d\rho \int_0^{2\pi} |K(\rho, \varphi)|^2 \exp(ik\rho(\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin(\theta)) \cdot [\sin(\varphi) + \cos(\varphi)]) \rho d\varphi}{\int_{\rho=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} |K(\rho, \varphi)|^2 \rho d\rho d\varphi} = \\
 &= \frac{\int_{\rho=0}^{\infty} d\rho \int_0^{2\pi} |K(\rho, \varphi)|^2 \exp\left(ik\rho(\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin(\theta)) \cdot \sqrt{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\right) \rho d\varphi}{\int_{\rho=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} |K(\rho, \varphi)|^2 \rho d\rho d\varphi} = \\
 &= \frac{\int_{\rho=0}^{\infty} |K(\rho, \varphi)|^2 J_0(k\rho(\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin(\theta))\sqrt{2}) \rho d\rho}{\int_{\rho=0}^{\infty} |K(\rho, \varphi)|^2 \rho d\rho} = \\
 &= \frac{\int_{\rho=0}^{\infty} |K(\rho, \varphi)|^2 J_0\left(2k\rho \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \cos\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) \sqrt{2}\right) \rho d\rho}{\int_{\rho=0}^{\infty} |K(\rho, \varphi)|^2 \rho d\rho} \cdot \frac{\int_{\rho=0}^{\infty} |K(\rho, \varphi)|^2 J_0\left(2\sqrt{2}k\rho \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \cos(\theta)\right) \rho d\rho}{\int_{\rho=0}^{\infty} |K(\rho, \varphi)|^2 \rho d\rho}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

де

$$|K(\alpha', \beta')|^2 = \left| \frac{J_1(k\rho NA_{eye})}{\rho NA} \right|^2$$



є функцією зображення точки для об'єктива з круглою апертурою з  $NA = NA_{eye}$ , а  $J_0$  та  $J_1$  є функцією Бесселя 1-го роду 0-го та 1-го порядку, відповідно. Для отримання рівняння (16) ми використали формулу:

$$\int_0^{2\pi} \exp(ix \cdot \sin(\varphi)) d\varphi = 2\pi J_0(x). \quad (17)$$

І нарешті:

$$b(\theta, \Delta\theta) = \frac{\int_{\rho=0}^{\infty} \left| \frac{J_1(k\rho NA_{eye})}{\rho NA} \right|^2 J_0\left(2\sqrt{2}k\rho \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \cos(\theta)\right) \rho d\rho}{\int_{\rho=0}^{\infty} \left| \frac{J_1(k\rho NA_{eye})}{\rho NA} \right|^2 \rho d\rho}. \quad (18)$$

### Чисельне моделювання

Для розрахунку контрасту спеклів ми підставили рівняння (18) у (3) і обрахували на комп'ютері отримані інтеграли. На рис. 3 показано  $b(0, \Delta\theta)$  для різного співвідношення числових апертур об'єктива лазерного проектора та ока, що дивиться на екран. Порівняння кривої на рис. 3,а та 3,б показує тільки незначну зміну форми декореляційної функції для двох різних співвідношень, проте вони мають практично однакову ширину максимуму декореляційної функції, що приблизно дорівнює числовій апертурі ока.

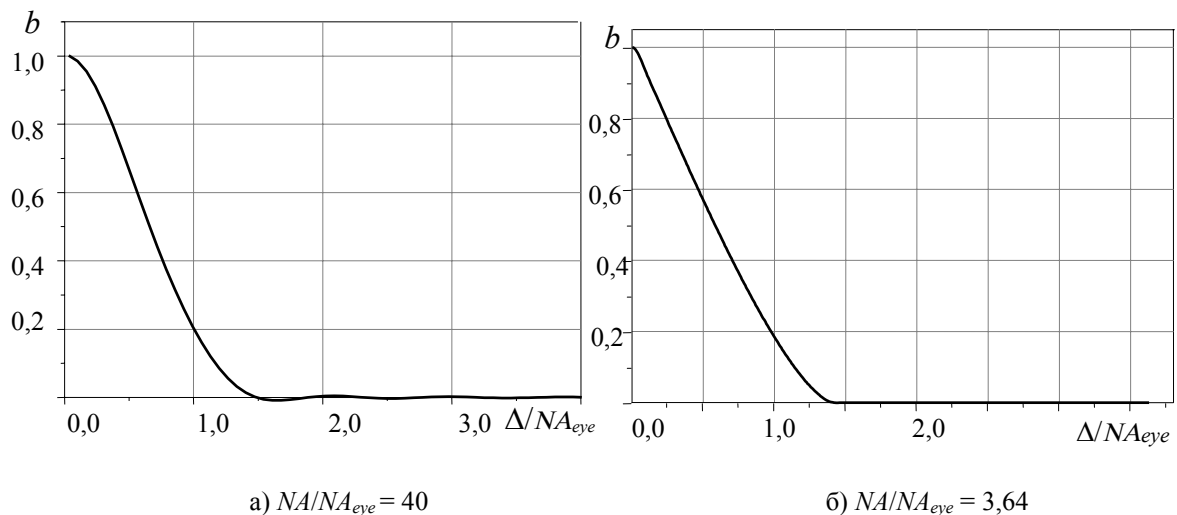


Рис. 3. Функція взаємної кореляції  $b(\Delta\theta)$  для різного співвідношення числових апертур об'єктивів ока та проектора

Для розрахунку контрасту спеклів потрібно мати розподіл інтенсивності світла за кутом  $\theta$ . Інтенсивність  $I(\theta)$  — це інтенсивність світла, яке падає на екран під тілесним кутом  $\sin(\theta) d\theta$ . Цей розподіл інтенсивності залежить як від властивостей лазерного пучка, що фокусується на вході в багатомодове оптоволокно, так і від особливостей поширення світла в багатомодовому оптоволокні. Слід зазначи-

ти, що коли інтенсивність є плавною функцією кута  $\theta$ , то зміни контрасту спеклів будуть невеликими при зміні розподілу інтенсивності, і не перевищать декількох десятків відсотків. У випадку, коли світло однорідно розподіляється по тілесному куту всередині числової апертури, точне наближення для інтенсивності буде визначатися як  $I(\theta) = \sin(\theta)$  (рис. 4). У цьому випадку рівняння (3) може бути переписане наступним чином:

$$C = \text{sqrt} \left( \int_0^{a \sin(NA)} d\theta \int_0^{a \sin(NA) - \theta} \sin(\theta) \sin(\theta + \Delta\theta) b^2(\theta, \theta + \Delta\theta) d\Delta\theta \right) / \int_0^{a \sin(NA)} \sin(\theta) d\theta. \quad (19)$$

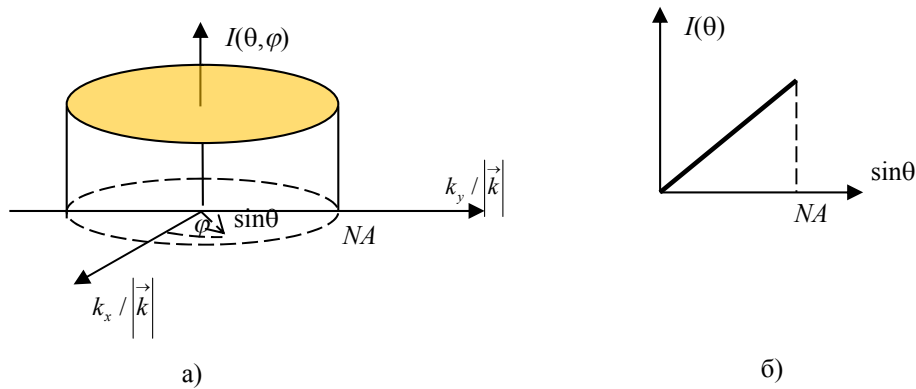


Рис. 4. Розподіл інтенсивності світла для однорідного за кутами розповсюдження лазерного пучка та при розповсюдженні без втрат і взаємоперетворення хвильоводних мод в оптоволоконні: а) 2D-розподіл інтенсивності світла; б) інтегрований 1D-розподіл інтенсивності світла

Для цього випадку розподілу інтенсивності за кутом падіння на рис. 5 показаний коефіцієнт зменшення спеклів і контраст спеклів залежно від кореня квадратного від відношення числової апертури об'єктива лазерного проектора до апертури ока, що дивиться на екран.

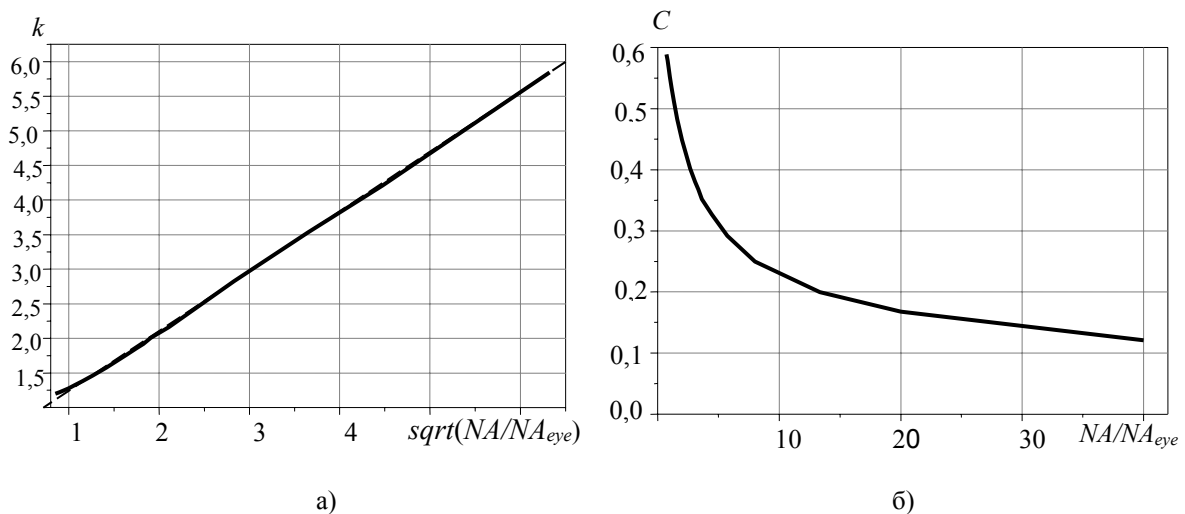


Рис. 5. Залежність коефіцієнта зменшення спеклів від квадратного кореня відношення числових апертур об'єктива проектора та ока (пунктирна лінія — лінійне наближення) у разі однорідного розподілу інтенсивності освітлення в просторі Фур'є (а) та контрасту спеклів від числового відношення цих числових апертур (б)

Коефіцієнт зменшення спеклів з достатньою для інженерних розрахунків точністю є лінійною функцією квадратного кореня числових апертур з пропорційним коефіцієнтом, близьким до одиниці. Це є прямим наслідком того, що оптоволокно має 1D-характер декореляції поля лазерних пучків, що випромінюються з дальнього кінця оптоволокна. Незважаючи на дуже велику числову діафрагму проектора  $NA/NA_{eye} = 40$ , отриманий контраст спеклів є досить великим — близько 12 % (див. рис. 5). Для отримання контрасту спеклів нижче контрастної чутливості людського ока необхідний коефіцієнт зменшення спеклів повинен бути порядку  $k = 15 \div 20$ , а отже для цього методу потрібна дуже велика числова апертура об'єктива лінзи зі співвідношенням числових апертур  $NA/NA_{eye} = 225 \div 400$ .

Зроблено математичне моделювання для випадку, коли інтенсивність світла лінійно зменшується до нуля від центру до периферії числової апертури, як показано на рис. 6. Для цього випадку  $I(\theta) = 1$ , тому рівняння для контрасту спеклів можна записати наступним чином:

$$C = \sqrt{\int_0^{a \sin(NA)} d\theta \int_0^{a \sin(NA) - \theta} b^2(\Delta\theta) d\Delta\theta} / \int_0^{a \sin(NA)} d\theta \quad (20)$$

З порівняння рис. 5 і 7 ми бачимо, що результати моделювання дають подібну залежність контрасту спеклів від числової апертури  $NA$ . Проте існує дещо більший ефект зменшення спеклів, приблизно на 15 %, для другого випадку, представленому на рис. 7. Це досягається завдяки більш однорідному розподілу інтенсивності світла за напрямками освітлення декорельованими лазерними пучками (порівняйте рис. 4,б і 6,б).

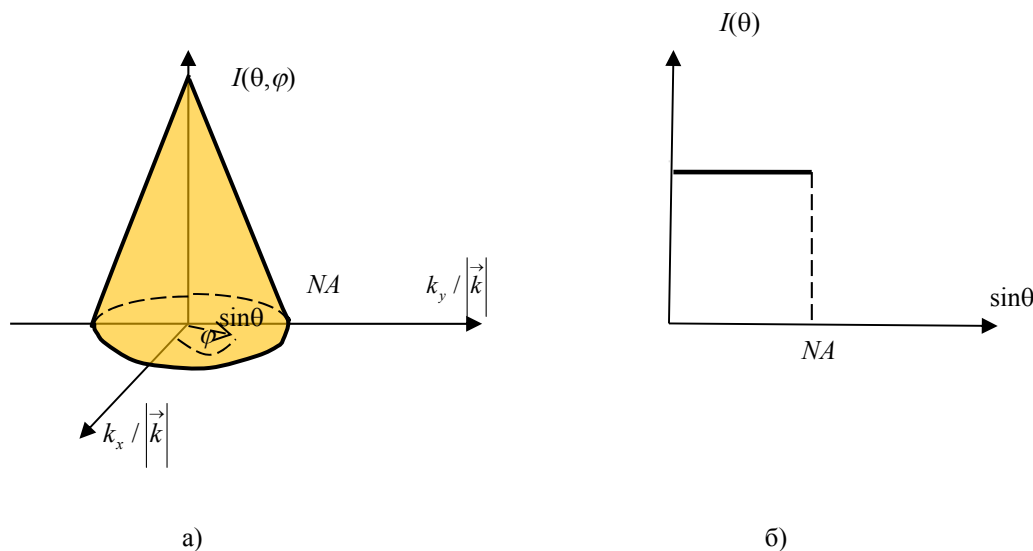


Рис. 6. Розподіл інтенсивності світла для лазерного пучка з лінійним зменшенням інтенсивності світла від синуса кута зміщення напрямку розповсюдження в пучку від оптичної осі при розповсюдженні без втрат і перетворень хвильоводних мод в оптоволокні:  
 а) 2D-розподіл інтенсивності світла; б) інтегрований 1D-розподіл інтенсивності світла

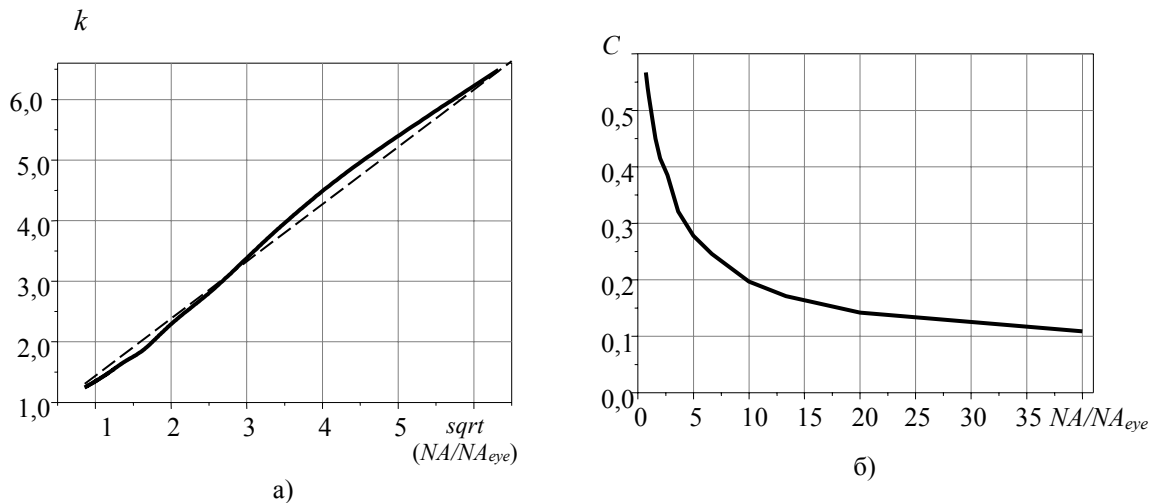


Рис. 7. Залежність коефіцієнта зменшення спеклів від квадратного кореня відношення між числовими апертурами об'єктива проектора та ока (пунктирна лінія є лінійним наближенням): а) у випадку однорідного розподілу інтенсивності у просторі Фур'є; б) контрасту спеклів від відношення цих числових апертур

## Висновки

Розроблено математичну модель механізму зменшення спеклів за допомогою пасивного довгого багатомодового оптоволоконна. Модель враховує те, що багатомодове оптоволоконно декорелює лазерне випромінювання тільки в радіальному напрямку розповсюдження перпендикулярному осі оптоволоконна і не декорелює світло, що розповсюджується по різних азимутальних напрямкам. Тобто декореляція є одновимірною з круговою симетрією. Тому коефіцієнт зменшення спеклів збільшується повільно тільки як корінь квадратний відношення числових апертур об'єктива проектора і ока. Тому неможливо цим методом зменшити рівень спеклів нижче контрастної чутливості ока людини, як припускалося в [13]. Для збільшення ефективності зменшення спеклів потрібна така модифікація методу, яка би дозволила використати також додатково і азимутальний напрямок розповсюдження променя, що дозволить цьому методу зменшити контраст спеклів нижче контрастної чутливості ока людини.

1. Weber M.J. Handbook of Lasers. CRC, 2019.
2. Yun S.K., Song J.-H., Yeo I.-J., Victor Y., An S.-D., et al. Spatial optical modulator (SOM): Samsung's light modulator for the next generation laser display. *Display*. 2007. Vol. 15. Issue 5. P. 321–333.
3. Goodman J.W. Speckle Phenomena in Optics: Theory and Applications. BenRoberts& Company, 2008.
4. Verschaffelt G., Roelandt S., Meuret Y., Van den Broeck W., Kilpi K., Lievens B., Jacobs A., Janssens P., and Thienpont H. Speckle disturbance limit in laser based cinema projection systems. *Sci. Rep.* 2015. **5**. P. 14105.
5. Kuwata, Sasagawa T., Kojima K., Michimori A., Sugiura H., Hirano Y., and Endo T. Reducing speckle in laser displays with moving screen system. *Journal of ITE*. 2011. **65**(2). P. 224–228.
6. Wang L., Tschudi T., Halldórsson T., Pétursson P.R. Speckle reduction in laser projection systems by diffractive optical elements. *Appl. Opt.* 1998. **37**(10). P. 1770–1775.
7. Trisnadi J.I. Hadamard speckle contrast reduction. *Opt. Lett.* 2004. **29**(1). P. 11–13.

8. Yurlov V., Lapchuk A., Yun S.-K., Song J.-H., and Yang H.-S. Speckle suppression in scanning laser display. *Appl. Opt.* 2008. **47**(2). P. 179–187.
9. Lapchuk A., Kryuchyn A., Petrov V., and Klymenko V. Optimal speckle suppression in laser projector using a single two-dimensional Barker code diffractive optical element. *J. Opt. Soc. Am. A.* 2013. **30**(2). P. 227–232.
10. Le Z., Lapchuk A., Gorbov I., Lu Z., Yao S., Kosyak I., Kliuieva T., Guo Y. Theory and experiments based on tracked moving flexible DOE loops for speckle suppression in compact laser projection. *Optics and Lasers in Engineering*. 2020. **124**. P. 105845.
11. Lapchuk A., Prygun O., Fu M., Le Z., Xiong Q., and Kryuchyn A. Dispersion of speckle suppression efficiency for binary DOE structures: spectral domain and coherent matrix approaches. *Opt. Express*. 2017. **25**(13). P. 14575–14597.
12. An S.-D., Lapchuk A., Yurlov V., Song J.H., Park H.W., Jang J.W., Shin W.C., Kargapoltsev S., and Yun S.-K. Speckle suppression in laser display using several partially coherent beams. *Opt. Express*. 2009. **17**(1). P. 92–103.
13. Manni G., Goodman J.W. Versatile method for achieving 1 % speckle contrast in large-venue laser projection displays using a stationary multimode optical fiber. *Opt. Express*. 2012. **20**. P. 11288–11315.
14. Prygun A.V., Morozov Y.M., Kliuieva T.Y., Borodin Y.A., Le Z. Completely passive method of speckle reduction utilizing static multimode optical fibre and two-dimensional diffractive optical element. *Journal of Modern Optics*, 2019. **6** (16). P. 1688–1694.
15. Lapchuk A., Le Z., Guo Y., Dai Y., Liu Z., Xu Q., Lu Z., Kryuchyn A., Gorbov I. Investigation of speckle suppression beyond human eye sensitivity by using a passive multimode fiber and a multimode fiber bundle. *Optics Express*. 2020. **28** (5). P. 6820–6834.
16. Пригун О.В. Зменшення оптичних спеклів за допомогою світловода та 2D дифракційного оптичного елемента без рухомих елементів оптичної схеми. *Ресстрація, зберігання і обробка даних*. Матеріали Щорічної підсумкової конференції 16–17 травня 2016 р. Київ: ІПРІ НАН України, 2016. С. 22–23.
17. Клюєва Т.Ю. Горбов. І.В., Пригун О.В. Вплив аберацій та ефектів розфокусування лазерного проектора на ефективність зменшення спеклових шумів. *Ресстрація, зберігання і обробка даних*. 2020. Т. 22. № 2. С. 19–32. <https://doi.org/10.35681/1560-9189.2020.22.2.211251>.

Надійшла до редакції 01.12.2020