DOI: 10.35681/1560-9189.2019.21.4.199392

УДК 550.34.01

А. И. Брицкий, О. А. Токалин
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина
e-mail: britsky_ai@ukr.net, тел.: (044) 454-21-23

Применение мембранных датчиков в системах гидролокации с использованием цифровых лазерных интерферометров

Представлены результаты исследований по возможности применения мембранных датчиков для приема гидроакустических сигналов на инфрачастотах. Показана целесообразность применения цифровых лазерных интерферометров в системах гидролокации на инфрачастотах.

Ключевые слова: *цифровой лазерный интерферометр, мембранный датчик, частотные характеристики.*

Введение

При охране водных рубежей нашей страны важной является задача гидролокации подводных и надводных объектов на большой дальности. В настоящее время на вооружение Вооруженных Сил Украины принята радиогидроакустическая система «Ятрань», которая предназначена для обнаружения вражеских кораблей и подводных лодок [1]. Она предполагает установку системы гидроакустических буев, дальность действия которых составляет около 30 км и совместную обработку информации от них. Однако на удалении 300–400 км такая система обнаружение подводных объектов не обеспечивает. Для решения таких задач разработана и развернута система SOSUS (США), которая не обеспечивает обнаружение подводных лодок последнего поколения, а в РФ разворачивается аналогичная система нового поколения [2].

Анализ последних исследований и публикаций

В доступных источниках информация о гидролокации подводных объектов на больших расстояниях с использованием инфрачастот практически отсутствует. На наш взгляд, большие перспективы практического применения при создании современных и перспективных гидроакустических средств поиска и обнаружения движущихся подводных объектов на больших дальностях по их шумоизлучению в диапазоне низких звуковых и инфразвуковых частот имеет цифровая лазерная интерферометрия. Особенно важен поиск движущихся подводных объектов в диапазоне инфразвуковых частот, в том числе ниже 10 Гц, поскольку уровень шумов в звуковом диапазоне частот движущихся подводных объектов существенно снизился. В инфразвуковом диапазоне частот понизить шумоизлучение очень сложно или практически невозможно, поскольку источником (или резонатором) сигналов в инфрачастотной области могут быть, например, длинномерные корпуса гидрообъектов. Для построения гидроакустических систем регистрации инфразвуковых сигналов целесообразно использовать разработанные в ИПРИ НАН Украины цифровые интерферометры на основе полупроводниковых лазеров, которые имеют разрешение на уровне 1,6 нм, частотный диапазон от 0 Гц и могут использоваться для регистрации слабых колебаний на инфрачастотах [3]. При этом интересным является вариант установки подвижного уголкового отражателя на чувствительном элементе (ЧЭ) — металлическом диске (мембране) конечной толщины, который воспринимает гидроакустические сигналы. Для этого необходимо определить чувствительность и частотные свойства ЧЭ и оценить возможность его использования в гидролокации совместно с цифровым лазерным интерферометром, что и является целью настоящей статьи.

Математическая модель чувствительного элемента

Основной характеристикой ЧЭ, как элемента системы регистрации инфразвука, является его передаточная функция, которая имеет смысл оператора, преобразующего внешнюю нагрузку на входе в нормальную реакцию на выходе. Согласно основам гидродинамики [4] звуковая волна в жидкости описывается потенциалом $\phi(\vec{r},t)$ или производными от него скаляром $p=-\rho\dot{\phi}(\vec{r},t)$ и вектором $\vec{v}=\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t)$, которые все удовлетворяют стандартному волновому уравнению. В качестве внешней нагрузки ЧЭ удобно выбрать скалярную величину — избыточное давление звуковой волны $p=-\rho_*\dot{\phi}(\vec{r},t)$, где ρ_* — плотность жидкости. Соответственно на ЧЭ со стороны жидкости действует суммарное давление P_0+p, где P_0 — статическое давление жидкости на глубине погружения (точнее разница давления на диск с внешней и внутренней стороны). В качестве ЧЭ рассматриваем пластину в виде диска конечной толщины h с закрепленной границей. Реакцией ЧЭ на воздействие давления является изгиб диска. Его можно охарактеризовать отклонением $Z(\vec{r},t)$ нейтральной плоскости диска от ее исходного положения (с которым связана система координат), описываемое уравнением [5]:

$$D_z\Delta^2 Z(\vec{r},t)+\rho h\ddot{Z}(\vec{r},t)=P_0+p(\vec{r},t), \tag{1}$$

где точками обозначена производная по времени; $D_z=Eh^3\big/12\left(1-\nu^2\right)$ — цилиндрическая жесткость диска; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала диска; Δ — двумерный Лапласиан, который с учетом осевой симметрии модели сводится к одному радиальному члену: $\Delta=r^{-1}(\partial/\partial r)r(\partial/\partial r)$.

Анализ модели и полученные результаты

Равновесный прогиб диска, погруженного на некоторую глубину, описывается исходным уравнением (1), если слева и справа от равенства исключить вторые (динамические) слагаемые. Общий интеграл уравнения равновесия [5]:

$$Z(r)=\frac{3\left(1-\nu^2\right)P_0}{16Eh^3}r^4+Ar^2+B+C\ln\left(\frac{r}{R}\right), \tag{2}$$

где R — радиус диска, причем из условий ограниченности нужно положить $C=0$. Определяя константы A и B из граничных условий $Z(R)=(\partial/\partial r)Z(R)=0$, получим

$$Z(r)=\frac{3}{16}\left(1-\nu^2\right)\frac{P_0R^4}{Eh^3}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) \tag{3}$$

с максимальным статическим прогибом в центре диска: $Z_M=\frac{3}{16}\left(1-\nu^2\right)\left(\frac{R}{h}\right)^3\frac{P_0}{E}R$, величина которого может быть учтена при настройке интерферометра. В частности, для стального диска с соотношением размеров $R:h=30:1$ на глубине $H(\text{м})$ величина максимального прогиба составляет $0{,}00023H$ (в ед. R), то есть на глубинах около 100 м она соответствует нескольким процентам от радиуса диска.

Для получения частотных характеристик передаточной функции ЧЭ будем считать волну синусоидальной и нормально падающей на плоскость диска $p(\vec{r},t)=p\sin\omega_0 t$ и воспользуемся преобразованием Фурье:

$$Z_\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}dte^{-i\omega t}Z(r,t)\rightleftarrows(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega e^{i\omega t}Z_\omega=Z(r,t).$$

В результате уравнение (1) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению вида

$$\begin{aligned}&D_z\left(\partial_r^4+2r^{-1}\partial_r^3-r^{-2}\partial_r^2+r^{-3}\partial_r\right)Z_\omega-\omega^2\rho hZ_\omega=\\&=2\pi P_0\delta(\omega)+i\pi p\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right],\end{aligned} \tag{4}$$

где $\delta(\omega)$ — дельта-функция, для сокращения записи под оператором ∂_r^k понимается k-я производная по r и учтено известное равенство [6]:

$$\delta(\omega)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}dte^{\pm i\omega t}.$$

Умножая левую и правую части уравнения (4) на $r^4D_z^{-1}$ соответствующее однородное уравнение приводим к виду

$$\left[(r\partial_r)^4+2(r\partial_r)^3-(r\partial_r)^2+r\partial_r\right]Z_\omega-(\kappa r)^4Z_\omega=0, \tag{5}$$

где

$$\kappa = \sqrt{\omega\sqrt{\frac{\rho h}{D_z}}} = \sqrt{2\frac{\omega}{h}\sqrt{3\left(1-\nu^2\right)\frac{\rho}{E}}} = \sqrt{\omega\frac{k_\nu^2}{hc_l}} \tag{6}$$

имеет смысл модуля волнового вектора радиально направленных поперечных упругих волн; c_l — скорость продольных волн (скорость звука) в материале диска; k_ν^2 — коэффициент, зависящий только от ν : $k_\nu^2 = 2\sqrt{3}\left(1-\nu\right)\left(1-2\nu\right)^{-1/2}$.

Общее решение однородного уравнения (5) имеет вид суперпозиции хорошо изученных цилиндрических функций [7, 8]:

$$\begin{aligned} Z_\omega &= C_1 J_0\left(\kappa r\right) + C_2 Y_0\left(\kappa r\right) + C_3^* J_0\left(i\kappa r\right) + C_4^* Y_0\left(i\kappa r\right) = \\ &= C_1 J_0\left(\kappa r\right) + C_2 Y_0\left(\kappa r\right) + C_3 I_0\left(\kappa r\right) + C_4 K_0\left(\kappa r\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Вронскиан для этих функций вычисляется при помощи рекуррентных соотношений, отличен от нуля и не зависит от индексов:

$$W\left\{J_0, Y_0, I_0, K_0\right\} = 4W\left\{J, Y\right\} W\left\{I, K\right\} = 4\frac{2}{\pi\kappa r}\cdot\frac{-1}{\kappa r} = \frac{-8}{\pi\left(\kappa r\right)^2} \neq 0\,. \tag{8}$$

Это позволяет найти общее решение неоднородного уравнения (4) стандартным образом при помощи системы уравнений относительно производных $C_m'\left(z\right)$, $m = 1, 2, 3, 4$:

$$\left\{\begin{matrix} C_1' J_0 + C_2' Y_0 + C_3' I_0 + C_4' K_0 = 0 \\ C_1' J_0' + C_2' Y_0' + C_3' I_0' + C_4' K_0' = 0 \\ C_1' J_0'' + C_2' Y_0'' + C_3' I_0'' + C_4' K_0'' = 0 \\ C_1' J_0''' + C_2' Y_0''' + C_3' I_0''' + C_4' K_0''' = \Phi \end{matrix}\right\}$$

при

$$\Phi = \pi\frac{\left(\kappa r\right)^4}{\rho h}\cdot\frac{2P_0\delta\left(\omega\right) + ip\left[\delta\left(\omega+\omega_0\right) - \delta\left(\omega-\omega_0\right)\right]}{\omega^2}\,. \tag{9}$$

Из (9) следует:

$$\begin{gathered} C_1 = \int dz\frac{2\Phi\left(z\right)W\left\{I,K\right\}}{W\left\{J,Y,I,K\right\}} = \int dz\frac{\Phi\left(z\right)Y_0\left(z\right)}{2W\left\{J,Y\right\}} = \int dz\frac{\pi z\Phi\left(z\right)Y_0\left(z\right)}{4}, \\ C_2 = -\int dz\frac{2\Phi\left(z\right)J_0\left(z\right)W\left\{I,K\right\}}{W\left\{J,Y,I,K\right\}} = -\int dz\frac{\pi z\Phi\left(z\right)J_0\left(z\right)}{4}, \\ C_3 = -\int dz\frac{2\Phi\left(z\right)K_0\left(z\right)W\left\{J,Y\right\}}{W\left\{J,Y,I,K\right\}} = -\int dz\frac{\Phi\left(z\right)K_0\left(z\right)}{2W\left\{I,K\right\}} = \int dz\frac{z\Phi\left(z\right)K_0\left(z\right)}{2}, \\ C_4 = \int dz\frac{2\Phi\left(z\right)I_0\left(z\right)W\left\{J,Y\right\}}{W\left\{J,Y,I,K\right\}} = -\int dz\frac{z\Phi\left(z\right)I_0\left(z\right)}{2} \end{gathered} \tag{10}$$

при $z=\kappa r$.

Общий интеграл уравнения (4) с учетом ограниченности решения имеет вид

$$Z_\omega = C_{10}J_0(\kappa r)+C_{30}I_0(\kappa r)+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{\kappa r} d\xi\xi\Phi(\xi)\left[\frac{\pi}{2}J_0(\kappa r)Y_0(\xi)-\frac{\pi}{2}Y_0(\kappa r)J_0(\xi)+I_0(\kappa r)K_0(\xi)-K_0(\kappa r)I_0(\xi)\right], \quad (11)$$

в котором константы C_{10} и C_{30} определяются из граничных условий $Z_\omega(\kappa R)=$ $=Z'_\omega(\kappa R)=0$:

$$C_{10}=\frac{1}{2}\int_0^{\kappa R} d\xi\xi\Phi(\xi)\left[\frac{\pi}{2}\cdot\frac{W\{Y_0,I_0\}}{W\{J_0,I_0\}}J_0(\xi)+\frac{1}{\kappa RW\{J_0,I_0\}}I_0(\xi)-\frac{\pi}{2}Y_0(\xi)\right],$$
$$C_{30}=\frac{1}{2}\int_0^{\kappa R} d\xi\xi\Phi(\xi)\left[\frac{1}{\kappa RW\{J_0,I_0\}}J_0(\xi)+\frac{W\{J_0,K_0\}}{W\{J_0,I_0\}}I_0(\xi)-K_0(\xi)\right], \quad (12)$$

где

$W\{J_0,I_0\}=J_0(\kappa R)I_1(\kappa R)+J_1(\kappa R)I_0(\kappa R), W\{Y_0,I_0\}=Y_0(\kappa R)I_1(\kappa R)+Y_1(\kappa R)I_0(\kappa R)$ и $W\{J_0,K_0\}=-J_0(\kappa R)K_1(\kappa R)+J_1(\kappa R)K_0(\kappa R)$ — вронскианы, составленные из соответствующих функций на фиксированной границе диска.

Обратное преобразование Фурье выражения (11) с учетом (12) полностью определяет вынужденные колебания зафиксированного по границе диска, однако в данной постановке проблемы это является избыточным, так как практический интерес представляют только колебания его центральной области. Функции $Y_0(\kappa r)$ и $K_0(\kappa r)$ в нуле имеют логарифмические особенности, поэтому интеграл в (11), куда эти функции входят с множителем ξ^5, стремится к нулю, и сумма амплитуды колебаний центральной области диска и статического прогиба определяется суммой констант:

$$A_0=C_{10}+C_{30}=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\kappa R} d\xi\xi\Phi\left[\frac{\frac{\pi}{2}\kappa RW\{Y_0,I_0\}+1}{\kappa RW\{J_0,I_0\}}J_0(\xi)+\frac{\kappa RW\{J_0,K_0\}+1}{\kappa RW\{J_0,I_0\}}I_0(\xi)-\frac{\pi}{2}Y_0(\xi)-K_0(\xi)\right]. \quad (13)$$

Находя входящие в (13) интегралы

$$\int_0^{\kappa R} d\xi\xi^5 Z_0(\xi)=\kappa R\left(\kappa^2R^2-8\right)\left[\left(\kappa^2R^2-8\right)Z_1(\kappa R)+4\kappa RZ_0(\kappa R)\right],$$

где

$$Z_n(\kappa R)=J_n(\kappa R) \text{ или } =Y_n(\kappa R),$$

$$\int_0^{\kappa R} d\xi \xi^5 I_0(\xi) = \kappa R\left(\kappa^2 R^2 + 8\right)\left[\left(\kappa^2 R^2 + 8\right) I_1(\kappa R) - 4\kappa R I_0(\kappa R)\right],$$

$$\int_0^{\kappa R} d\xi \xi^5 K_0(\xi) = -\kappa R\left(\kappa^2 R^2 + 8\right)\left[\left(\kappa^2 R^2 + 8\right) K_1(\kappa R) + 4\kappa R K_0(\kappa R)\right],$$

получим

$$A_0 = \frac{P(\omega) R^2}{\omega\sqrt{\rho h D_z} W\{J_0, I_0\}} \left\{ \frac{(\kappa R)^4 + 64}{(\kappa R)^2} \left[J_1(\kappa R) + I_1(\kappa R)\right] + 4(\kappa R)\left[J_0(\kappa R) - I_0(\kappa R)\right] \right\} =$$
$$= \left(1-\nu^2\right)\frac{12 P(\omega) R^4}{E h^3} \cdot \frac{\left[(\kappa R)^4 + 64\right]\left[J_1(\kappa R) + I_1(\kappa R)\right] + 4(\kappa R)^3\left[J_0(\kappa R) - I_0(\kappa R)\right]}{(\kappa R)^4 W\{J_0, I_0\}}, \tag{14}$$

где

$$P(\omega) = 2\pi P_0 \delta(\omega) + i\pi p\left[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\right],$$
$$W\{J_0, I_0\} = J_0(\kappa R) I_1(\kappa R) + J_1(\kappa R) I_0(\kappa R).$$

На низких частотах $\kappa R \ll 1$ (длина волны намного превышает габариты ЧЭ) функции Бесселя разлагаются в ряды

$$J_m(\kappa R) = \left(\frac{\kappa R}{2}\right)^m \sum_{k=0} \frac{(i\kappa R)^{2k}}{2^{2k} k!(k+m)!} \approx \frac{1}{m!}\left(\frac{\kappa R}{2}\right)^m \left[1 - \frac{(\kappa R)^2}{4(m+1)} + \frac{(\kappa R)^4}{16(m+1)(m+2)} - \ldots\right],$$

$$I_m(\kappa R) = \left(\frac{\kappa R}{2}\right)^m \sum_{k=0} \frac{(\kappa R)^{2k}}{2^{2k} k!(k+m)!} \approx \frac{1}{m!}\left(\frac{\kappa R}{2}\right)^m \left[1 + \frac{(\kappa R)^2}{4(m+1)} + \frac{(\kappa R)^4}{16(m+1)(m+2)} + \ldots\right],$$

поэтому ограничиваясь членами не выше второго порядка, получим:

$$A_0 \approx 12\left(1-\nu^2\right)\frac{P(\omega)}{E}\left(\frac{R}{h}\right)^3\left[\frac{64}{(\kappa R)^4} + 2{,}01\right] R. \tag{15}$$

Можно также заметить, что общий вид формул (14) и (15) имеет сходство с формулой для максимального статического прогиба диска, однако динамическая характеристика возрастает с ростом длины волны как λ^2.

Очевидно, что собственные частоты ЧЭ в виде закрепленного по краю диска определяются из уравнения:

$$W\{J, I\} = J_0(\kappa R) I_1(\kappa R) + J_1(\kappa R) I_0(\kappa R) = 0. \tag{16}$$

Рис. 1 иллюстрирует это уравнение, там же показан его первый корень. Корни уравнения (16) X_j связаны с собственными частотами при помощи соотношения:

$$f_j = \frac{h c_l}{2\pi R^2}\left(\frac{\mathrm{X}_j}{k_\nu}\right)^2. \tag{17}$$

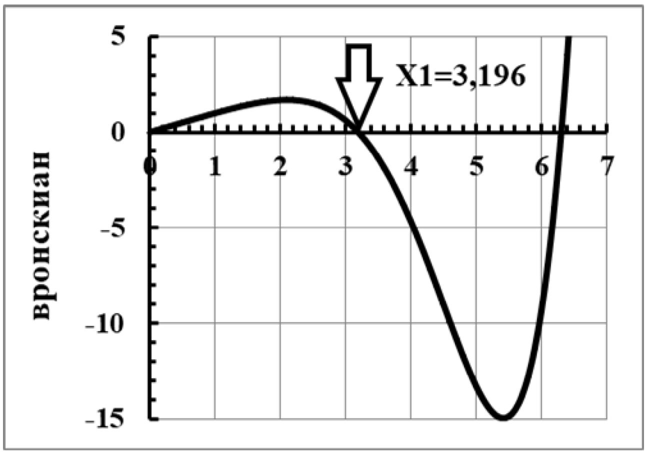

Рис. 1. Зависимость вронскиана $W\{J,I\}$ от безразмерного аргумента $x=\kappa R$

Заметим, что величину $(\kappa R/X_1)^2$ можно рассматривать как универсальную частоту, нормированную на собственную частоту первой гармоники ЧЭ, то есть $\omega/\omega_1=(\kappa R/X_1)^2=0{,}09789\cdot(\kappa R)^2$. Анализ выражения (14) показывает, что частотная зависимость реакции ЧЭ на гармоническое воздействие инфразвука определяется только последним сомножителем, который имеет вид рациональной дроби. Результаты расчетов в виде зависимости этого частотно-зависимого коэффициента от нормированной универсальной частоты $\omega/\omega_1=0{,}09789\cdot(\kappa R)^2$ показаны на рис. 2.

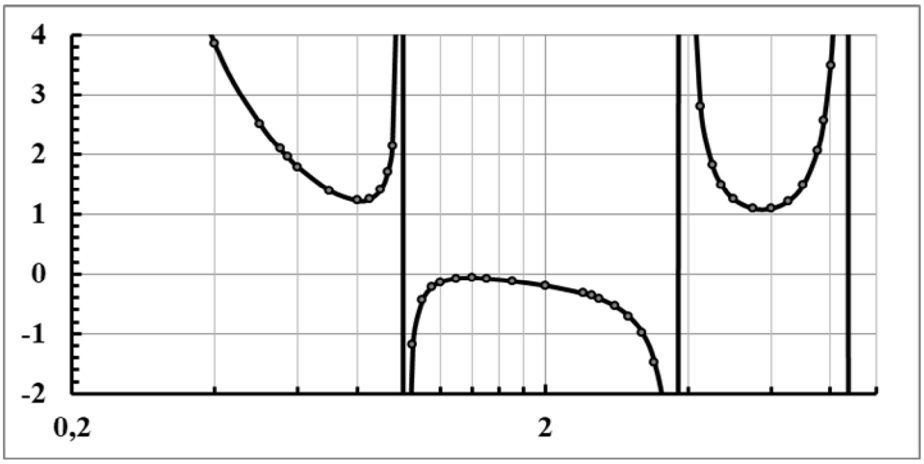

Рис. 2. Зависимость частотно-зависимого фактора от универсальной частоты ω/ω_1.
Представлена субрезонансная область частот и три первых резонанса

Как видно из представленной частотной зависимости, в области резонансов частотно-зависимый фактор меняет знак. Это соответствует скачку фазо-частотной характеристики в пределах $\pm\pi/2$. Величина реакции ЧЭ на гармоническое воздействие минимальна в частотной области между первым и вторым резонансом. В субрезонансной области частот в соответствии с формулой (15) частотная зависимость реакции ЧЭ аппроксимируется степенной функцией ω^{-2}. Эти особенности более ярко выражены на зависимости модуля частотно-зависимого фактора, показанной на рис. 3.

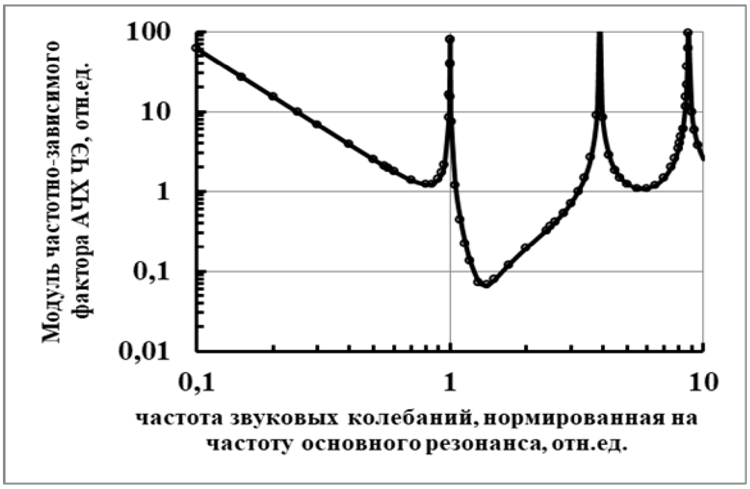

Рис. 3. Зависимость модуля частотно-зависимого фактора реакции ЧЭ на воздействие звуковых колебаний от частоты, нормированной по частоте основного (первого) резонанса, в логарифмическом масштабе

Как видно из хода кривой в субрезонансной области частот, аппроксимация степенной функцией ω^{-2} (или λ^{2} для длины волны) применима уже на частотах менее $2/3 \cdot \omega_1$.

Выводы

На основе теоретического анализа получена передаточная функция чувствительного элемента лазерной интерференционной системы регистрации инфразвуковых волн в водной среде в виде амплитуды колебаний в центральной части зафиксированного по окружности диска конечной толщины при гармоническом возбуждении. В области инфразвуковых частот ($f \leq 15$ Гц) частотная зависимость амплитуды колебаний аппроксимируется степенной функцией с показателем –2, а ее величина значительно превышает амплитуды в области частот между резонансами. Реакция ЧЭ на гармоническое воздействие минимальна в частотной области между первым и вторым резонансами.

1. Радиогидроакустическая система «Ятрань» от «КНИИ гидроприборов» принята на вооружение ВСУ. Информационный портал Транспортный бизнес. URL: http://tbu.com.ua/news/radiogidroakusticheskie_sistema_iatran_ot_knii_gidropriborov_priniata_na_voorujenie_vsu_.html

2. Котов М. Российский флот сделает себе СОСУС. URL: https://life.ru/t/наука/ 880271/rossiiskii_flot_sdielaiet_siebie_sosus

3. Britsky Oleksander I., Gorbov Ivan V., Petrov Viacheslav V., Balagura Iryna V. A compact semiconductor digital interferometer and its applications. Proc. SPIE 9506. Optical Sensors – 2015. 2015. Vol. 9506. 7 p. doi: 10.1117/12.2178476.

4. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Гидродинамика. Теоретическая физика. Т. 6. Москва: Наука, 1986. 736 с.

5. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория упругости. Теоретическая физика. Т. 7. Москва: Наука, 1987. 246 с.

6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров; пер. с англ./под общей ред. И.Г. Арамановича. Москва: Наука. 1974. 832 с.

7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Наука, 1971. 589 с.

8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами/под ред. М. Абрамовица и И. Стиган; пер. с англ./под ред. В.А. Диткина и Л.Н. Кармазинной. Москва: Наука, 1979. 832 с.

Поступила в редакцию 22.11.2019