

УДК 004.942

Я. А. Калиновский¹, Ю. Е. Бояринова^{1,2},
А. С. Сукало³, Я. В. Хицко²

¹Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

²Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»
Проспект Победы, 37, 03113 Киев, Украина

³Национальный университет водного хозяйства и природопользования
ул. Соборная, 11, 33028 Ровно, Украина

Рекуррентный метод построения алгоритмов линейной свертки различной длины с помощью гиперкомплексных числовых систем

Рассмотрен синтез последовательного ряда алгоритмов линейной свертки массивов, длина которых не равна 2^n , для чего используются методы гиперкомплексных числовых систем. Синтез последовательного ряда алгоритмов линейной свертки основан на рекуррентном окаймлении сумм парных произведений отсчетов свертки с последующим применением изоморфных гиперкомплексных числовых систем. Полученные алгоритмы по числу умножений близки к алгоритмам Виннограда.

Ключевые слова: гиперкомплексная числовая система, линейная свертка, изоморфизм, умножение, бикомплексные числа, квадриплексные числа.

Введение

Линейная свертка дискретных сигналов с некоторым ядром является наиболее общей и важной вычислительной задачей в области цифровой обработки сигналов. Так как эта операция, как правило, производится много раз, то весьма актуальной является задача синтеза быстрых алгоритмов выполнения линейной свертки, чему и посвящена настоящая работа.

Пусть дискретный сигнал имеет вид

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}, \quad (1)$$

а ядро свертки

© Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало, Я. В. Хицко

$$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}. \quad (2)$$

Тогда их линейная свертка будет [1–3]:

$$C(k) = \sum_{i=1}^N x_{k+i} y_i, \quad k = -(N-1), \dots, 0, \dots, (N-1), \quad (3)$$

т.е. всего $2(N-1)$ отсчетов.

Как видно из (3), при таком формулировании потребуются значения сигнала с индексами, выходящими за границы интервала $[1, N]$. Поэтому сигнал нужно доопределить:

$$X = \{x_{-(N-2)}, \dots, x_0, x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1}, \dots, x_{2N-1}\}, \quad (4)$$

всего $3N-2$ значений. При этом новые значения нужно положить равными нулю:

$$x_i = 0 \quad \text{при } i \notin [1, \dots, N].$$

Для более упрощенного представления дальнейших формул последовательность значений ядра целесообразно представлять в инверсном виде:

$$Y^* = \{y_N, y_{N-1}, \dots, y_1\}. \quad (5)$$

Связь между инверсными y_i^* значениями и прямыми y_i задается соответствием:

$$y_i^* = y_{N-i+1}. \quad (6)$$

В случае использования ядра в инверсной форме формула вычисления компонентов свертки (3) превращается в следующую:

$$C(k) = \sum_{i=1}^N x_{N+k-i+1} y_i, \quad k = -(N-1), \dots, 0, \dots, (N-1). \quad (7)$$

Формулы (3) и (7) полностью эквивалентны, связь между ними определяется формулой (6).

Так как сложность вычисления линейной свертки последовательностей длиной N есть $O(N^2)$, и быстро увеличивается с ростом N , то используются методы «быстрых» вычислений. Одним из наиболее распространенных методов является свертка с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ) со сложностью $O(N \log N)$. В основе многочисленных алгоритмов БПФ лежит декомпозиция исходной задачи большой размерности в большое количество задач малой размерности. Поэтому весьма важным является разработка таких методов решения задач малой размерности, которые используют, возможно, меньшее число вещественных операций.

В соответствии с теоремой Винограда для линейной свертки [1, 2] нижняя граница количества вещественных умножений при выполнении линейной свертки

последовательностей длины N равна $2N-1$, что может быть ориентиром при оценке качества алгоритма. Однако, как отмечается в работе [1]: «Во многих случаях в качестве меры сложности вычислений берется количество арифметических операций в алгоритме. Хотя и существует грубое соответствие между общей и арифметической сложностью алгоритма, все же практическая ценность вычислительного метода зависит от многих факторов... Сравнения, основанные лишь на числе арифметических операций, должны быть «взвешены» с учетом факторов, возникающих при конкретных реализациях этих алгоритмов». Это говорит о том, что необходимы алгоритмы с самыми разнообразными свойствами. В данной работе рассмотрены алгоритмы выполнения свертки, основанные на переходе к гиперкомплексным пространствам. Основы такого подхода разработаны авторами и изложены в работе [4].

Принципы приложения методов ГЧС к вычислению свертки

Рассмотрим члены свертываемых числовых последовательностей длиной $N = 2^n$ как компоненты гиперкомплексных чисел, принадлежащих некоторой ГЧС Γ_1 размерностью $\dim \Gamma_1 = 2^n$. Произведение этих гиперкомплексных чисел будет содержать парные произведения компонентов свертываемых числовых последовательностей. Однако они будут комбинироваться в суммы не в таком составе, как это нужно для организации компонентов свертки.

Кроме того, число вещественных умножений при умножении гиперкомплексных чисел в общем случае равно 2^{2n} — столько же, сколько и при непосредственном вычислении свертки, то есть, нет никакого выигрыша.

Таким образом, здесь возникают две проблемы: первая — это снижение количества вещественных операций при умножении гиперкомплексных чисел; вторая — организация выбора парных произведений компонентов свертки. Решение этих двух проблем позволяет синтезировать такие алгоритмы свертки, которые будут по количеству операций эффективнее других алгоритмов выполнения свертки.

Для решения первой проблемы можно перейти в такую ГЧС, изоморфную исходной, таблица умножения которой заполнена слабо. Такие пары ГЧС существуют и описаны в [5, 6].

Переход между такими ГЧС требует только выполнения операций сложения вещественных чисел.

Решение второй проблемы зависит от конкретного вида используемых ГЧС и рассмотрено ниже.

Если дискретный сигнал и ядро имеют длину N , и они представляются N -мерными гиперкомплексными числами в некоторой ГЧС, то:

- 1) свертка имеет $2N-1$ компонентов, а произведение двух гиперкомплексных чисел имеет N компонентов;
- 2) в каждом компоненте произведения двух гиперкомплексных чисел содержится по N слагаемых, а в компонентах свертки число слагаемых переменное — от 1 до N .

Кроме этого, следует учесть, что при умножении двух гиперкомплексных чисел количество вещественных умножений M может в зависимости от типа применяемой ГЧС изменяться в пределах

$$N \leq M \leq N^3,$$

тогда как в свертке N^2 парных произведений.

Для уменьшения количества вещественных умножений можно воспользоваться изоморфными ГЧС. В соответствии с теоремой Вейерштрасса-Дедекинда [3], коммутативная полупростая алгебра изоморфна прямому произведению полей. Это означает, что для всякой канонической ГЧС [4] существует изоморфная ей ГЧС, на диагонали таблицы умножения которой находятся либо клетки таблиц умножения поля комплексных чисел, либо какой-либо базисный элемент, а остальные ячейки таблицы умножения — нули.

Гиперкомплексные алгоритмы вычисления свертки последовательностей длиной $N = 2^n$

Рассмотрим, прежде всего, случай $n = 1$, то есть линейную свертку двух числовых последовательностей $\{x_1, x_2\}$ и $\{y_2, y_1\}$, длина которых равна 2. В соответствии с (7) линейная свертка будет иметь три отсчета:

$$\begin{aligned} C(-1) &= x_1 y_1, \\ C(0) &= x_1 y_2 + x_2 y_1, \\ C(1) &= x_2 y_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Для построения алгоритма вычисления отсчетов свертки используются изоморфные ГЧС двойных $W(e, 2)$ и ортодвойных чисел $W_1(f, 2)$, таблицы умножения которых имеют вид [7, 8]:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline W & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 \\ \hline e_2 & e_2 & e_1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline W_1 & f_1 & f_2 \\ \hline f_1 & f_1 & 0 \\ \hline f_2 & 0 & f_2 \\ \hline \end{array} \tag{9}$$

а прямой и обратный операторы изоморфизма:

$$L : \begin{cases} e_1 = f_1 + f_2, \\ e_2 = f_1 - f_2, \end{cases} \quad L^{-1} : \begin{cases} f_1 = (e_1 + e_2) / 2, \\ f_2 = (e_1 - e_2) / 2. \end{cases} \tag{10}$$

Будем рассматривать элементы последовательностей $\{x_1, x_2\}$ и $\{y_2, y_1\}$ как компоненты гиперкомплексных чисел ГЧС W :

$$X = x_0 e_0 + x_1 e_1, \tag{11}$$

$$Y = y_2 e_1 + y_1 e_2. \tag{12}$$

В соответствии с таблицей умножения ГЧС W :

$$XY = (x_1 y_2 + x_2 y_1) e_1 + (x_1 y_1 + x_2 y_2) e_2. \tag{13}$$

Правая часть выражения (13) содержит все парные произведения, необходимые для формирования свертки (8). Более того, компонента при e_1 полностью совпадает с отсчетом $z(0)$, а компонента при e_2 равна сумме остальных отсчетов. Но количество вещественных умножений также равно 4, как и в (8). Таким образом, возникают две проблемы: во-первых, уменьшить число умножений в (13), и, во-вторых, разделить отсчеты $z(-1)$ и $z(1)$.

Для уменьшения количества умножений целесообразно перейти из системы W в систему W_1 . Тогда для перевода чисел $X, Y \in W$ в числа $X_1, Y_1 \in W_1$ необходимо в (11) и (12) подставить левые преобразования (10). Тогда:

$$X_1 = (x_1 + x_2)f_1 + (x_1 - x_2)f_2, \quad (14)$$

$$Y_1 = (y_1 + y_2)f_0 + (y_2 - y_1)f_1. \quad (15)$$

Такой переход требует дополнительно 4 сложения. Однако, учитывая, что обычно числовой массив сворачивается с постоянным ядром, переход которого в W_1 сделан заранее, то можно считать, что переход из системы W в систему W_1 требует только 2 сложения.

Умножение чисел (14) и (15) в соответствии с таблицей умножения W_1

$$X_1 Y_1 = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = (x_1 + x_2)(y_2 + y_1)f_1 + (x_1 - x_2)(y_2 - y_1)f_2 \quad (16)$$

требует 2 умножения.

Обратный переход из W_1 в систему W в соответствии с правым преобразованием (10) будет иметь вид

$$XY = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} e_1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} e_2, \quad (17)$$

что также требует 2 сложения. Деление на 2 — это короткая операция, требующая только сдвига регистра. Поэтому ее можно не учитывать.

Приравнявая правые части (13) и (17), получим:

$$x_1 y_2 + x_2 y_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \quad (18)$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}. \quad (19)$$

Если вычислить заранее одно из слагаемых в левой части (19), например, $x_1 y_1$, то компоненты свертки (7) будут вычисляться по следующим формулам:

$$\begin{aligned} C(-1) &= x_1 y_1, \\ C(0) &= (\alpha_1 + \alpha_2) / 2, \\ C(1) &= (\alpha_1 - \alpha_2) / 2 - x_1 y_1, \end{aligned} \quad (20)$$

что требует 3 умножения и 5 сложений. Здесь необходимо отметить следующее. При увеличении размерности $N = 2^n$, как будет показано далее, этот алгоритм

можно будет применять $n-1$ раз. При этом значение $x_1 y_1$ у них будет общее. А поэтому число умножений во всех алгоритмах, кроме одного, снижается в 2 раза.

Таким образом, на вычисление одного парного произведения приходится 0,75 операций вещественных умножений.

Рассмотрим линейную свертку двух числовых последовательностей $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и $Y = \{y_4, y_3, y_2, y_1\}$, длина которых равна 4. В соответствии с (7) линейная свертка будет иметь 7 отсчетов:

$$\begin{aligned}
 C(-3) &= x_1 y_1, \\
 C(-2) &= x_1 y_2 + x_2 y_1, \\
 C(-1) &= x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_1, \\
 C(0) &= x_1 y_4 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_4 y_1, \\
 C(1) &= x_2 y_3 + x_3 y_3 + x_4 y_2, \\
 C(2) &= x_3 y_4 + x_4 y_3, \\
 C(3) &= x_4 y_4.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Для выполнения данной свертки необходимо выполнить 16 вещественных умножения и 9 сложений.

Как показано в работах [8, 9], в этом случае эффективен алгоритм, в котором используются как изоморфизм $W \simeq W_1$, так и изоморфизм автоудвоений этих систем — $W^{(2)} \simeq W_1^{(2)}$, таблицы умножения которых показаны ниже:

$W^{(2)}$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_1	e_4	e_3
e_3	e_3	e_4	e_1	e_2
e_4	e_4	e_3	e_2	e_1

$W_1^{(2)}$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	0	0	0
f_2	0	f_2	0	0
f_3	0	0	f_3	0
f_4	0	0	0	f_4

Так как $W^{(2)} \simeq W_1^{(2)}$, то между базисными элементами этих ГЧС и существуют следующие соотношения [8, 9]:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= f_1 + f_2 + f_3 + f_4, & f_1 &= (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)/4, \\
 e_2 &= f_1 - f_2 + f_3 - f_4, & f_2 &= (e_1 - e_2 + e_3 - e_4)/4, \\
 e_3 &= f_1 + f_2 - f_3 - f_4, & f_3 &= (e_1 + e_2 - e_3 - e_4)/4, \\
 e_4 &= f_1 - f_2 - f_3 + f_4. & f_4 &= (e_1 - e_2 - e_3 + e_4)/4.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Будем рассматривать элементы последовательностей X и Y как компоненты гиперкомплексных чисел ГЧС $W^{(2)}(e, 4)$ с такими же идентификаторами:

$$X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4, \quad (23)$$

$$Y = y_4e_1 + y_3e_2 + y_2e_3 + y_1e_4. \quad (24)$$

Тогда в соответствии с таблицей умножения ГЧС $W^{(2)}(e, 4)$ произведение гиперкомплексных чисел (23) и (24) имеет вид:

$$XY = \sum_{i=1}^4 \alpha_i e_i, \quad (25)$$

где компоненты α_i таковы:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1, \\ \alpha_2 &= x_1y_3 + x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2, \\ \alpha_3 &= x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 + x_4y_3, \\ \alpha_4 &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4. \end{aligned} \quad (26)$$

Для уменьшения количества умножений целесообразно перейти из системы $W^{(2)}(e, 4)$ в систему $W_1^{(2)}(f, 4)$ [8, 9]. Тогда для перевода гиперкомплексных чисел, принадлежащих $W^{(2)}(e, 4)$, в гиперкомплексные числа, принадлежащие $W_1^{(2)}(f, 4)$, необходимо в (23) и (24) подставить преобразования (22). Тогда

$$\begin{aligned} X_1 = \sum_{i=1}^4 \beta_i f_i &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)f_1 + (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)f_2 + \\ &+ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)f_3 + (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)f_4. \end{aligned} \quad (27)$$

Аналогично преобразовывается и гиперкомплексное число Y :

$$Y_1 = \sum_{i=1}^4 \gamma_i f_i. \quad (28)$$

Такой переход требует дополнительно 16 сложений. Однако, учитывая, что обычно числовая последовательность сворачивается с постоянным ядром, переход элементов которого в $W_1^{(2)}(f, 4)$ сделан заранее, то можно считать, что переход из системы $W^{(2)}(e, 4)$ в систему $W_1^{(2)}(f, 4)$ требует только 8 сложений.

Произведение чисел (27) и (28) в соответствии с таблицей умножения $W_1^{(2)}(f, 4)$ имеет вид:

$$X_1 Y_1 = \sum_{i=1}^4 \beta_i \gamma_i f_i. \quad (29)$$

Оно требует всего лишь 4 умножения.

Обратный переход из $W_1^{(2)}(f, 4)$ в систему $W^{(2)}(e, 4)$ в соответствии с (22) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 XY = \sum_{i=1}^4 \alpha_i e_i &= \frac{1}{4}(\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 + \beta_4 \gamma_4) e_1 + \frac{1}{4}(\beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 - \beta_4 \gamma_4) e_2 + \\
 &+ \frac{1}{4}(\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 - \beta_3 \gamma_3 - \beta_4 \gamma_4) e_3 + \frac{1}{4}(\beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2 - \beta_3 \gamma_3 + \beta_4 \gamma_4) e_4.
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

После этого производится свертка последовательностей $\{x_1, x_2\}$ и $\{y_1, y_2\}$. На это уйдет 3 умножения, и будут получены значения $x_2 y_2$ и $x_1 y_2 + x_2 y_1$. При этом полученное при преобразовании значение $x_2 + x_1$ может быть использовано в дальнейшем, сокращая при этом количество сложений. Далее выполняется свертка последовательностей $\{x_1, x_3\}$ и $\{y_1, y_3\}$. На это уже необходимо только 2 умножения, и будут получены значения $x_3 y_3$ и $x_1 y_3 + x_3 y_1$, которые используются в дальнейшем.

Таким образом, если вычислены значения величин:

$$\alpha_i, i = 1, \dots, 4; \quad x_1 y_1; \quad x_2 y_2; \quad x_3 y_3; \quad x_1 y_2 + x_2 y_1; \quad x_1 y_3 + x_3 y_1,$$

на что необходимо затратить 9 умножений, то компоненты свертки примут вид:

$$\begin{aligned}
 C(-3) &= x_1 y_1, \\
 C(-2) &= x_1 y_2 + x_2 y_1, \\
 C(-1) &= x_1 y_3 + x_2 y_3 + x_3 y_1, \\
 C(0) &= \alpha_0, \\
 C(1) &= \alpha_1 - (x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_3 y_3), \\
 C(2) &= \alpha_2 - (x_1 y_2 + x_2 y_1), \\
 C(3) &= \alpha_3 - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3).
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

Здесь уже на вычисление одного парного произведения приходится $9/16 = 0,5625$ операций вещественного умножения. Как показали исследования [6, 9], алгоритмы подобной структуры приводят к увеличению количества операций на вычисление одного парного произведения. В то же время, полная декомпозиция задачи на фрагменты 4×4 позволяет синтезировать алгоритмы с постоянным количеством операций на вычисление одного парного произведения, равным $0,5625$ операций вещественного умножения. Схема такого алгоритма для $N = 2^3 = 8$ приведена на рис. 1.

Как видно из этой схемы, каждый квадрант представляет собой свертку 4×4 , и если переименовать соответствующим образом индексы, то получится левый верхний квадрант. Так, например, в правом верхнем квадранте достаточно индексы при x уменьшить на 5.

Таким образом, здесь при любом n количество операций на вычисление одного парного произведения равно $0,5625$, но добавляется $2^n - 1$ сложений.

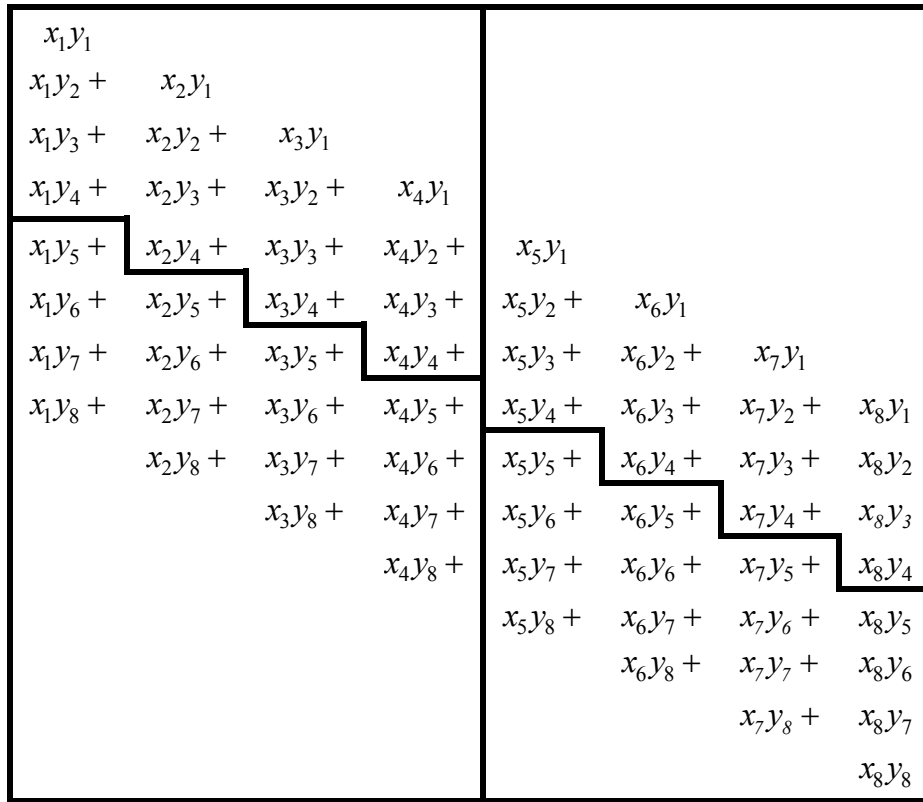


Рис. 1. Схема полной декомпозиции

Рекуррентные гиперкомплексные алгоритмы свертки для длин $N = 2^n$

Рассмотренные ранее методы синтеза алгоритмов свертки распространялись только на случаи длин свертываемых последовательностей, равных степени двойки. Однако на практике очень часто необходимо свертывать последовательности длин $N \neq 2^n$. Так, например, при обработке изображений часто необходима свертка последовательностей длиной $N = 3$.

Для построения такого алгоритма свертки, подобного алгоритму свертки 2×2 , необходимо иметь две изоморфных ГЧС размерности $\dim = 3$, одна из которых сильнозаполненная, а вторая — слабо, подобно показанным ниже ГЧС $3R$ и G_{33} :

G_{33}	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	e_3	e_1
e_3	e_3	e_1	e_2

$3R$	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	0	0
f_2	0	f_2	0
f_3	0	0	f_3

Однако эти ГЧС неизоморфны. Если составить и решить систему уравнений изоморфизма этих ГЧС, то нетривиальные решения ее — комплексные. Например, матрица одного из решений, имеет вид:

$$\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & (-1+i\sqrt{3})/2 & (-1-i\sqrt{3})/2 \\ 1 & (-1-i\sqrt{3})/2 & (-1+i\sqrt{3})/2 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, ГЧС $3R$ и G_{33} : не пригодны для построения алгоритма быстрой свертки 3×3 . Как показали исследования [6, 9] из изоморфных систем третьей размерности для этих целей лучше всего подходит пара изоморфных ГЧС T и $R \oplus C$, таблицы умножения которых имеют вид:

T	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	$(e_3 - e_1)/2$	$-e_2$
e_3	e_3	$-e_2$	e_1

$R \oplus C$	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	0	0
f_2	0	f_2	f_3
f_3	0	f_3	$-f_2$

Отметим, что выполнение гиперкомплексного умножения в ГЧС $3R$ требует 3 вещественных умножения, тогда как гиперкомплексное умножение в ГЧС $R \oplus C$ даже с использованием процедуры быстрого умножения комплексных чисел требует 4 вещественных умножения. Кроме того, как видно из таблицы умножения ГЧС T , при умножении гиперкомплексных чисел будет не 9 парных произведений, а 10, и некоторые из них с противоположными знаками. Подробный анализ показывает, что с помощью ГЧС T и $R \oplus C$ можно синтезировать алгоритм свертки, в котором будет 8 умножений, то есть выигрыш — 1 умножение, что очень мало. Поэтому нужно искать другие подходы к синтезу алгоритмов свертки последовательностей длиной $N \neq 2^n$.

На рис. 2 показаны компоненты линейной свертки 3×3 . Компоненты, выделенные жирной линией, являются компонентами свертки 2×2 , алгоритм вычисления которой приведен выше.

x_1y_1		
$x_1y_2 +$	x_2y_1	
$x_1y_3 +$	$x_2y_2 +$	x_3y_1
	$x_2y_3 +$	x_3y_2
		x_3y_3

Рис. 2. Компоненты линейной свертки 3×3

Как видно из рис. 2, компоненты линейной свертки 3×3 получаются из компонентов свертки 2×2 , для вычисления которых нужно произвести 3 умножения, «окаймлением» пятью элементами, то есть нужно к вычислению свертки 2×2 добавить 5 умножений. Всего: $3 + 5 = 8$ умножений, как и в предыдущем алгоритме. Однако в данном случае можно уменьшить число умножений. Фрагмент, показанный на рис. 3, представляет собой свертку последовательностей $\{x_2, x_3\}$ и $\{y_3, y_2\}$, причем произведение $x_2 y_2$ уже известно.

$x_2 y_2 +$	$x_3 y_1$
$x_2 y_3 +$	$x_3 y_2$
	$x_3 y_3$

Рис. 3. Компоненты свертки последовательностей $\{x_2, x_3\}$ и $\{y_3, y_2\}$

А поэтому для вычисления компонентов $x_2 y_3 + x_3 y_2$ и $x_3 y_3$ нужно 2 умножения. Парные произведения $x_1 y_3$ и $x_3 y_1$ необходимо вычислить непосредственно. Таким образом, алгоритм вычисления свертки 3×3 с помощью «обрамления» свертки 2×2 включает $3 + 2 + 2 = 7$ умножений. Это меньше, чем алгоритм, основанный на использовании изоморфных ГЧС T и $R \oplus C$. Критерием α эффективности алгоритма свертки является отношение числа умножений M_N , требующихся при выполнении свертки $N \times N$, ко всему количеству парных произведений:

$$\alpha = \frac{M_N}{N^2}. \tag{32}$$

Заметим, что если на вычисление одного парного произведения свертки 2×2 приходится 0,75 операций вещественных умножений, то для свертки 3×3 α будет несколько больше $\alpha \approx 0,78$.

Рассмотрим компоненты линейной свертки $N \times N$ в общем виде (рис. 4).

$x_1 y_1$...			
$x_1 y_2 +$	$x_2 y_1$...			
...
$x_1 y_{N-1} +$	$x_2 y_{N-2} +$	$x_3 y_3 +$...	$x_{N-2} y_2 +$	$x_{N-1} y_1$	
$x_1 y_N +$	$x_2 y_{N-1} +$	$x_3 y_{N-2} +$...	$x_{N-2} y_3 +$	$x_{N-1} y_2 +$	$x_N y_1$
	$x_2 y_N +$	$x_3 y_{N-1} +$...	$x_{N-2} y_4 +$	$x_{N-1} y_3 +$	$x_N y_2$
...
				$x_{N-2} y_N +$	$x_{N-1} y_{N-1} +$	$x_N y_{N-2}$
			...		$x_{N-1} y_N +$	$x_N y_{N-1}$
			...			$x_N y_N$

Рис. 4. Компоненты линейной свертки $N \times N$ в общем виде

Как видно из рис. 4, для перехода от свертки $(N-1) \times (N-1)$ к свертке $N \times N$ нужно выполнить $2(N-1)$ умножений. Таким образом, существует рекуррентная зависимость:

$$M_N = M_{N-1} + 2(N-1). \quad (33)$$

При использовании такого метода построения алгоритма вычисления свертки критерий возрастает при росте длины свертываемой последовательности. Так, например, при росте длины последовательности от $N=4$ индекс α будет расти так, как показано в следующей таблице.

Зависимость α от N

N	4	5	6	7	8	9	10
α	0,5625	0,68	0,75	0,79592	0,82812	0,85185	0,87

Как видно из этой таблицы, при $\alpha=0,5625$ индекс $\alpha=0,82812$ равен. Однако ранее было отмечено, что для целых степеней двойки есть алгоритмы декомпозиции с применением ГЧС, для которых этот индекс гораздо меньше: $\alpha=0,5625$. Поэтому при $N=8$ нецелесообразно продолжать процесс рекурсии от $N=7$, а использовать алгоритм декомпозиции для степени 2.

Таким образом, алгоритм вычисления свертки рекурсивный до значения длины сворачиваемой последовательности, равной $2^n - 1$, а далее при $N=2^n$ используется алгоритм декомпозиции, после чего продолжается рекурсия до заданного значения длины сворачиваемой последовательности.

На рис. 5 показана зависимость индекса α от длины сворачиваемого массива N .

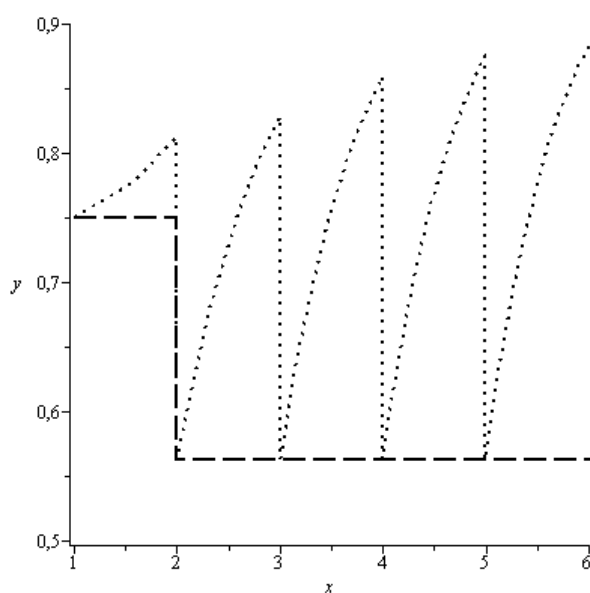


Рис. 5. Зависимость индекса α от длины сворачиваемого массива N

По оси x в логарифмическом масштабе длина сворачиваемой последовательности N , а по оси y — индекс α для алгоритма декомпозиции (штриховая линия) и рекуррентного алгоритма (точки).

Выводы

Показана возможность построения алгоритмов вычисления линейной свертки числовых последовательностей, длины которых отличаются от целых степеней двойки.

Алгоритмы представляют собой рекуррентное «окаймление» компонент свертки предыдущей длины свертываемой последовательности.

За начало рекурсии принимается свертка, построенная на основе алгоритма декомпозиции с использованием ГЧС для длины последовательности, равной ближайшей меньшей степени двойки по отношению к заданной длине.

Алгоритмы подобного типа наиболее эффективны для длин последовательностей, близких к 2^n сверху (количество умножений снижается на $\approx 30\%$).

1. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. Москва: Мир, 1989. 449 с.
2. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток Москва: Радио и связь, 1985. 248 с.
3. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. Санкт-Петербург: Питер, 2003. 604 с.
4. Калиновский Я.А. Структура гиперкомплексного метода быстрого вычисления линейной свертки дискретных сигналов. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2013. Т. 15. № 1. С. 31–44.
5. Синьков М.В., Бояринова Ю.Е., Калиновский Я.А. Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения. Киев: Инфодрук, 2010. 388 с.
6. Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е. Высокорамерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений. Киев: Инфодрук, 2012. 183 с.
7. Калиновский Я.А., Ландэ Д.В., Бояринова Ю.Е., Хицко Я.В. Гиперкомплексные числовые системы и быстрые алгоритмы цифровой обработки информации. Киев: ИПРИ НАНУ, 2014. 130 с.
8. Калиновський Я.О. Розвиток методів теорії гіперкомплексних числових систем для математичного моделювання і комп'ютерних обчислень: дис. докт. техн. наук: 01.05.02. Київ, 2007. 308 с.
9. Калиновский Я.А., Синькова Т.В. Алгоритмы быстрого вычисления циклической свертки с представлением дискретных сигналов гиперкомплексными числами. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2014. Т. 16. № 1. С. 9–18.
10. Калиновский Я.А. Исследование симметрий оператора изоморфизма гиперкомплексных числовых систем и их использование для синтеза алгоритмов быстрого вычисления циклической свертки. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2014. Т. 16. № 2. С. 42–51.
11. Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е., Синькова Т.В., Сукало А.С. Построение высокоразмерных изоморфных гиперкомплексных числовых систем для повышения эффективности вычислительных процессов. *Електронне моделювання*. 2016. Т. 38. № 6. С. 67–84.
12. Kalinovskiy Y.A., Boyarinova Y.E., Sukalo A.S., Khitsko Y.V. The basic principles and the structure and algorithmically software of computing by hypercomplex number. arXiv preprint arXiv:1708.04021, 2017.
13. Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е., Хицко Я.В., Сукало А.С. Программный комплекс для гиперкомплексных вычислений. *Електронне моделювання*. 2017. Т. 39. № 5. С. 81–96.

Поступила в редакцию 24.09.2018