УДК 004.932.2

Є. О. Цибульська
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Використання швидких алгоритмів обчислення кореляції і згортки для підготовки еталонних зображень

Розглянуто ряд методів обчислення взаємокореляційної функції і згортки двох зображень при вирішенні задачі підготовки еталонних зображень для кореляційно-екстремальної системи навігації керованих літальних апаратів. Проведено оцінку обчислювальної складності алгоритмів двовимірної взаємокореляційної функції і двовимірної згортки, визначено алгоритмічні рішення, що дозволяють зменшити час перевірки якості та відбору оптимального еталонного зображення для корекції польоту літальних апаратів.

Ключові слова: *еталонне зображення, оцінка якості, взаємокореляційна функція, згортка, перетворення Фур'є, перетворення Хартлі.*

Вступ

Для вирішення задачі корекції траєкторії польоту керованих літальних апаратів (ЛА) з кореляційно-екстремальними системами навігації (КЕСН) використовуються еталонні зображення (ЕЗ) поверхні візування вздовж траєкторії польоту. Порівняння еталонного зображення з поточними зображеннями, що формуються бортовими датчиками інформації під час польоту, дозволяє згенерувати коригуючий сигнал, який компенсує накопичену помилку автономної системи навігації [1].

Результат порівняння еталонного і поточного зображень істотно залежить від якості еталонного зображення, заздалегідь синтезованого в результаті обробки цифрових карт місцевості, супутникових та аерознімків у різних діапазонах хвиль та з різною роздільною здатністю. В процесі формування еталонних зображень здійснюється багаторазове обчислення взаємокореляційної функції (ВКФ) або її аналогів, сформованих варіантів ЕЗ і вхідних зображень [2], що потребує значних часових витрат. Для підвищення оперативності вирішення задачі формування ЕЗ доцільно використовувати швидкі алгоритми обчислення таких функцій.

Найбільш відомими методами швидкого обчислення ВКФ і згортки є методи з використанням дискретного перетворення Фур'є (ДПФ), однак вони також мають велику трудомісткість і потребують значних обчислювальних ресурсів.

Постановка задачі

Фізичний сенс функцій кореляції і згортки полягає в тому, що вони є кількісною мірою тотожності (подібності) двох сигналів. Якщо сигнал $x(t) \cong y(t)$, то результуючий сигнал — $wk(t) = \max$ (функція автокореляції), в іншому разі — $wk(t) < \max$ (функція взаємної кореляції). Крім того, аперіодична згортка з ядрами визначеного вигляду використовується для низькочастотної фільтрації сигналів, тобто може застосовуватися для корекції шумових спотворень при попередній обробці зображень [2].

Метою роботи було отримання модифікації методу обчислення ВКФ і згортки двох зображень із використанням двовимірного перетворення Хартлі для забезпечення зменшення обчислювальної складності, а отже і скорочення часу, що необхідний для підготовки еталонних зображень.

Застосування швидких алгоритмів перетворення Фур'є для обчислення функцій згортки та кореляції при визначенні якості еталонних зображень

Представимо зображення *X* та *Y* як двовимірні дискретні функції $X = \{x_{ij}\}$, $Y = \{y_{kl}\}$, де x_{ij} та y_{kl} — значення яскравості пікселів з координатами i, j та k, l відповідно, *Y* є фрагментом *X*. Взаємна кореляційна функція *X* та *Y* визначається формулою [3]

$$Corr(X,Y) = X \bullet Y(m,n) = \sum_i \sum_j x(m+i, n+j)y(i,j), \tag{1}$$

а взаємне розміщення зображень визначається координатами максимуму даної функції.

Відповідно, згортка *X* та *Y* представляється формулою:

$$Conv(X,Y) = X * Y(m,n) = \sum_i \sum_j x(m-i, n-j)y(i,j). \tag{2}$$

Найбільш відомим методом швидкого обчислення взаємної кореляційної функції є метод з використанням дискретного перетворення Фур'є (ДПФ).

Двовимірне ДПФ полягає в пошуку за сигналом $\{x\} = x_{00}, x_{01}, ..., x_{n-1,m-1}$ іншого сигналу $\{X\} = X_{00}, X_{01}, ..., X_{N-1,M-1}$, елементи якого обчислюються за формулою

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x_{n,m} W_N^{km} W_N^{kn}, \tag{3}$$

де $W_N = e^{\frac{-j2\pi}{N}}$ — повертаючий множник.

Обернене ДПФ (ОДПФ) полягає в пошуку за сигналом $\{X\} = X_{00}, X_{01}, ..., X_{N-1,M-1}$ іншого сигналу $\{x\} = x_{00}, x_{01}, ..., x_{n-1,m-1}$, елементи якого обчислюються за формулою:

$$x_n = \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} X_{k,l} W_N^{kn} W_N^{nl} . \qquad (4)$$

Згідно з теоремою про згортку, якщо $x_p(n,m)$ та $y_p(n,m)$ — періодичні двовимірні сигнали з періодами по (N,M) відліків і ДПФ $X_p(k,l)$ та $Y_p(k,l)$, то (N,M)-точкове ДПФ сигналу $x * y_p(n,m) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} x_p(n-k, m-l) y_p(k,l)$, який є згорткою сигналів $x_p(n,m)$ та $y_p(n,m)$, дорівнює:

$$X * Y_p(k,l) = X_p(k,l) Y_p(k,l) . \qquad (5)$$

Аналогічно теоремі про згортку, взаємна кореляційна функція обчислюється за таким правилом: якщо $x_p(n,m)$ та $y_p(n,m)$ — періодичні двовимірні сигнали з періодами по (N,M) відліків і ДПФ $X_p(k,l)$ та $Y_p(k,l)$, то (N,M)-точкове ДПФ сигналу $x \bullet y_p(n,m) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} x_p(n+k, m+l) y_p(k,l)$, який є ВКФ послідовностей $x_p(n,m)$ та $y_p(n,m)$, дорівнює:

$$X \bullet Y_p(k,l) = X_p(k,l) Y_p^*(k,l) , \qquad (6)$$

де * означає спряжене ДПФ.

Оскільки ядро перетворення Фур'є є подільованим за змінними, то для обчислення двовимірного перетворення обчислюються одновимірні перетворення по рядках, а потім одновимірні перетворення по стовпчиках.

Тому для обчислення згортки (взаємокореляційної функції) двох зображень необхідно виконати такі дії:

1) обчислити двовимірне ДПФ $x(n,m)$ і двовимірне (спряжене для ВКФ) ДПФ $y(n,m)$ — $X(k,l)$ та $Y(k,l)$ ($Y^*(k,l)$);

2) отримані $X(k,l)$ та $Y(k,l)$ ($Y^*(k,l)$ для ВКФ) почленно перемножити;

3) обчислити обернене двовимірне ДПФ добутку $X(k,l)Y(k,l)$ ($X(k,l)Y^*(k,l)$ для ВКФ).

Складність обчислень згортки (взаємокореляційної функції) при використанні формул (3), (4) складатиме:

1) 2 двовимірних ДПФ сигналів розмірності (N,N) — $2 \cdot 2 \cdot 2N^3$ операцій;

2) добуток комплексних спектрів розмірності (N,N) — $6N^2$ операцій;

3) обернене двовимірне ДПФ розмірності (N,N) — $2 \cdot 2N^3$ операцій.

Разом — $6(2N^3 + N^2)$ операцій.

У випадку великих розмірів зображень обчислення ВКФ таким способом є достатньо ресурсномісткою операцією, тому на практиці доцільно використовувати алгоритми швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) [3].

Сутність алгоритму ШПФ полягає в поділі сигналу на частини, їхній незалежній обробці та формуванні з проміжних результатів підсигналів удвічі більшої довжини. Такі дії виконуються, поки не сформується один сигнал довжиною N. Залежно від початкової довжини підсигналів, є алгоритми з основою 2, 4 та змішаною основою.

У матричному вигляді алгоритм ШПФ з основою 2 представлено співвідношенням

$$\begin{cases} F^0 = X, \\ F^m = \begin{vmatrix} f_{k,m} \\ f_{k+l,m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} W_{N_m}^0 & 0 \\ 0 & W_{N_m}^k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_{k,m-1} \\ f_{k+l,m-1} \end{vmatrix}, \end{cases} \tag{7}$$

де $l = 2^{m-1}$, $m \in \overline{1,M}$, $k = (n) \bmod l$, $k \in \overline{0, 2^{m-1}-1}$, $n \in (0, N-1)$, $N = 2^m$;
у вигляді рекурсивних рівнянь:

$$\begin{cases} f_{k,m} = f_{k,m-1} + f_{k,m-1} \cdot W_{N_m}^K, \\ f_{k+l,m} = f_{k,m-1} - f_{k,m-1} \cdot W_{N_m}^K. \end{cases} \tag{8}$$

Складність обчислень згортки (взаємокореляційної функції) при використанні ШПФ з формулою базової операції (8) складатиме:

1) 2 двовимірних ШПФ сигналів розмірності (N, N) — $2 \cdot 4N^2 \log_2 N$ операцій;

2) добуток комплексних спектрів розмірності (N, N) — $6N^2$ операцій;

3) обернене двовимірне ШПФ розмірності (N, N) — $4N^2 \log_2 N$ операцій.

Разом — $6N^2(2 \cdot \log_2 N + 1)$ операцій.

Застосування швидких алгоритмів перетворення Хартлі для обчислення функцій згортки та кореляції при визначенні якості еталонних зображень

Перетворення Хартлі [3, 4] визначається формулою

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) cas(2\pi tx) dx,$$

де $cas(2\pi tx) = \cos(2\pi tx) + \sin(2\pi tx)$;
відповідно, обернене перетворення Хартлі —

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) cas(2\pi tx) dt.$$

У дискретному вигляді:

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k cas(\frac{2\pi kn}{N}), \; x_m = \sum_{k=0}^{N-1} H_n cas(\frac{2\pi nm}{N}), \tag{9}$$

де

$$cas(\frac{2\pi nm}{N}) = \cos(\frac{2\pi nm}{N}) + \sin(\frac{2\pi nm}{N}) . \qquad (10)$$

Перетворення Фур'є пов'язане з перетворенням Хартлі співвідношенням $|F(t)|^2 = \frac{H^2(t) + H^2(-t)}{2}$, а дійсна та уявна компоненти перетворення Фур'є можуть обчислюватися на основі перетворення Хартлі:

$$\mathrm{Re}\{F(t)\} = \frac{H(t) + H(-t)}{2}, \ \mathrm{Im}\{F(t)\} = \frac{H(t) - H(-t)}{2}, \qquad (11)$$

де $H(-t)$ — дзеркальне відображення $H(t)$.

Двовимірне дискретне перетворення Хартлі (ДПХ) обчислюється за формулою:

$$H_{kl} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_{mn} cas(\frac{2\pi(mk + nl)}{N}) . \qquad (12)$$

Дане перетворення не має властивості подільності за змінними, тому пропонується ввести модифіковане перетворення

$$H_{\hat{k}l} = \sum_{m=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_{mn} cas(\frac{2\pi nl}{N}) \right] cas(\frac{2\pi mk}{N}), \qquad (13)$$

де

$$H_{kl} = \frac{1}{2}\left[H_{\hat{k},l} + H_{\hat{k},-l} + H_{-\hat{k},l} - H_{-\hat{k},-l} \right], \qquad (14)$$

$$(N-k) \bmod N = -k, (N-l) \bmod N = -l .$$

Враховуючи (14), перетворення Фур'є пов'язане з модифікованим перетворенням Хартлі співвідношеннями:

$$\mathrm{Re}\{F_{k,l}\} = \frac{H_{\hat{k},-l} + H_{-\hat{k},l}}{2}, \ \mathrm{Im}\{F_{k,l}\} = -\frac{H_{\hat{k},l} - H_{-\hat{k},-l}}{2} . \qquad (15)$$

Підставивши (11) у вирази (5), (6), отримаємо правила обчислення згортки та взаємокореляційної функції із використанням модифікованого перетворення Хартлі:

$$X * Y_p(k,l) = \frac{1}{2}(H^{(1)}(k,l) \cdot H^{(2)}(k,l) + H^{(1)}(-k,-l) \cdot H^{(2)}(k,l) + \\ + H^{(1)}(k,l) \cdot H^{(2)}(-k,-l) - H^{(1)}(-k,-l) \cdot H^{(2)}(-k,-l)), \qquad (16)$$

$$X \bullet Y_p(k,l) = \frac{N}{2}(H^{(1)}(k,l) \cdot H^{(2)}(k,l) + H^{(1)}(-k,-l) \cdot H^{(2)}(-k,-l)) . \qquad (17)$$

Складність обчислень згортки (взаємокореляційної функції) при використанні формул (16), (17), з урахуванням (14), (15), складатиме:

1) 2 двовимірних ДПХ сигналів розмірності (N, N) — $2 \cdot 2N^3$ операцій;

2) складний добуток дійсних спектрів розмірності (N, N) — $7N^2$ операцій для функції згортки або $3N^2$ операцій для взаємокореляційної функції;

3) обернене двовимірне ДПХ розмірності (N, N) — $2N^3$ операцій.

Разом — $6N^3 + 7N^2$ операцій для функції згортки або $3(2N^3 + N^2)$ операцій для взаємокореляційної функції.

Алгоритм швидкого перетворення Хартлі (ШПХ), як аналог ШПФ, отримаємо, підставивши (11) у рекурсивну формулу базової операції ШПФ (8) [3].

Згідно (11):

$$f_{k,m} = \frac{h_{k,m} + h_{p,m}}{2} - j\frac{h_{k,m} - h_{p,m}}{2}, \tag{18}$$

$$\begin{cases} f_{k,m-1} = \dfrac{h_{k,m-1} + h_{p,m-1}}{2} - j\dfrac{h_{k,m-1} - h_{p,m-1}}{2}, \\ f_{k+l,m-1} = \dfrac{h_{k+l,m-1} + h_{p+l,m-1}}{2} - j\dfrac{h_{k+l,m-1} - h_{p+l,m-1}}{2}, \end{cases} \tag{19}$$

де h_p — компонент, дзеркальний до h_k.

Тоді

$$\begin{gathered} h_{k,m} + h_{p,m} - j(h_{k,m} - h_{p,m}) = \left[h_{k,m-1} + h_{p,m-1} - j(h_{k,m-1} - h_{p,m-1})\right] + \\ + \left[h_{k+l,m-1} + h_{p+l,m-1} - j(h_{k+l,m-1} - h_{p+l,m-1})\right] \cdot \left[\cos\frac{2\pi k}{N_m} - j\sin\frac{2\pi k}{N_m}\right]. \end{gathered} \tag{20}$$

Звідси отримаємо вирази для дійсної та уявної частин:

$$\begin{gathered} h_{k,m} + h_{p,m} = h_{k,m-1} + h_{p,m-1} + (h_{k+l,m-1} - h_{p+l,m-1})\cos\frac{2\pi k}{N_m} - \\ -(h_{k+l,m-1} - h_{p+l,m-1})\sin\frac{2\pi k}{N_m}, \end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered} h_{k,m} - h_{p,m} = h_{k,m-1} - h_{p,m-1} + (h_{k+l,m-1} + h_{p+l,m-1})\cos\frac{2\pi k}{N_m} + \\ +(h_{k+l,m-1} + h_{p+l,m-1})\sin\frac{2\pi k}{N_m}. \end{gathered} \tag{22}$$

Тоді $h_{k,m} = h_{k,m-1} + h_{k+l,m-1}\cos\frac{2\pi k}{N_m} + h_{p+l,m-1}\sin\frac{2\pi k}{N_m}$, а оскільки $(p+l)\bmod l = p$, то $h_{p+l,m-1}\sin\frac{2\pi k}{N_m} = h_{p,m-1}\sin\frac{\pi k}{N_m}$.

Таким чином, базова рекурсивна операція ШПХ буде мати вигляд:

$$\begin{cases} h_{k,m} = h_{k,m-1} + h_{k+l,m-1}\cos\dfrac{2\pi k}{N_m} + h_{p,m-1}\sin\dfrac{\pi k}{N_m}, \\ h_{k+l,m} = h_{k,m-1} - h_{k+l,m-1}\cos\dfrac{2\pi k}{N_m} - h_{p,m-1}\sin\dfrac{\pi k}{N_m}. \end{cases} \quad (23)$$

Складність обчислень згортки (взаємокореляційної функції) при використанні ШПХ з формулою базової операції (23), з урахуванням (14), (15), складатиме:

1) 2 двовимірних ШПХ сигналів розмірності (N,N) — $2\cdot 3N^2\log_2 N$ операцій;

2) складний добуток дійсних спектрів розмірності (N,N) — $7N^2$ операцій для функції згортки або $3N^2$ операцій для взаємокореляційної функції;

3) обернене двовимірне ШПХ розмірності (N,N) – $3N^2\log_2 N$ операцій.

Разом $N^2(9\log_2 N+7)$ операцій для функції згортки або $3N^2(3\log_2 N+1)$ операцій для взаємокореляційної функції.

У таблиці наведено показники складності обчислень функції згортки та ВКФ з використанням перетворень Фур'є та Хартлі.

Операція / Метод	ВКФ	Згортка
ДПФ	$6N^2(2N+1)$	$6N^2(2N+1)$
ДПХ	$3N^2(2N+1)$	$N^2(6N+7)$
ШПФ з основою 2	$6N^2(2\log_2 N+1)$	$6N^2(2\log_2 N+1)$
ШПХ з основою 2	$3N^2(3\log_2 N+1)$	$N^2(9\log_2 N+7)$

Отже, отримані аналітичні вирази для розрахунку кількості операцій показують, що використання перетворення Хартлі забезпечує значно більшу продуктивність обчислень згортки та взаємокореляційної функції.

Висновки

З наведених показників видно, що перетворення Хартлі за рахунок використання дійсного ядра потребує обчислень приблизно вдвічі менше, ніж перетворення Фур'є. Враховуючи більш складну операцію множення спектрів, обчислення згортки з використанням ШПХ потребує приблизно таку ж кількість операцій, як при використанні ШПФ, а обчислення ВКФ із використанням ШПХ потребує приблизно на третину менше операцій, ніж при використанні ШПФ. Крім того, обчислення перетворення Хартлі, на відміну від перетворення Фур'є, не збільшує розмірності даних, тому не приводить до подвоєння обсягу оперативної пам'яті для зберігання дійсної та уявної компонент. Оскільки вхідні зображення для підготовки ЕЗ як правило мають великий розмір (до 6000×6000 пікселів), використання алгоритмів перетворення Хартлі дозволяє зменшити час перевірки якості та відбору оптимального еталонного зображення для вирішення задачі корекції польоту ЛА.

1. Сотников А.М., Таршин В.А. Обоснование принципов построения и разработка модели корелляционно-экстремальной системы наведения комбинированного типа. *Системи управління навігації та зв'язку*. 2012. № 4(24). С. 7–11.

2. Юзефович В.В., Буточнов А.Н., Мезенцев А.В., Миронюк С.В. Оценка качества эталонных изображений, создаваемых для корреляционно-экстремальных систем навигации. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2015. Т. 17. № 2. С. 29–38.

3. Тропченко А.Ю., Тропченко А.А. Цифровая обработка сигналов. Методы предварительной обработки. Санкт-Петербург: ГУ ИТМО, 2009. 100 с

4. Брейсуелл Р. Преобразование Хартли. Теория и приложения. Москва: Мир, 1990. 175 с.

Надійшла до редакції 21.06.2018