УДК 004.942.519.87

Є. О. Додонов, О. Г. Додонов, А. І. Кузьмичов
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Моделювання та візуалізація максимальних багатопродуктових потоків у мережі

Розглянуто багатопродуктові потоки — звичайну природну ситуацію, коли неперервні чи дискретні потоки будь-чого, пасажирів, транспортних засобів, води, електроенергії, сировини, продукції чи інформації, одним словом — продуктів (commodity), рухаються в мережі від одного вузла до іншого. Тут один і той же вузол може бути одночасно джерелом потоків одного чи кількох продуктів (товарів чи послуг), стоками та проміжними пунктами потоків різних продуктів, а кожна дуга — каналом одночасного руху потоків різних продуктів у визначеному напрямку із обмеженою пропускною здатністю. Представлено методику розв'язання задачі мережевої оптимізації про максимальний багатопродуктовий потік у ненаправленій мережі із застосуванням доступних засобів комп'ютерного моделювання.

***Ключові слова**: потоки у мережах, одно- та багатопродуктові потоки, мережева оптимізація, maximum multicommodity flows, network optimization.*

Вступ

У проблематиці мережевої оптимізації вершиною ієрархії є фундаментальна задача про потоки мінімальної вартості, її складова наступного рівня — задача про максимальний 1-продуктовий потік (*Maximum flow problem, MFP*), різновидом якої є задача про максимальний *K*-продуктовий потік (*Maximum Multicommodity flow, MMF*), тобто, про розподіл K ($K > 1$) індивідуальних потоків (різної природи та властивостей) у мережі (N, A) широкого вжитку, де N — множина n вузлів (*nodes*), A — множина m дуг (*arcs*) мережі.

Модель задачі *MMF* суттєво відмінна від моделі класичної задачі *MFP* про максимальний потік[1] [1], де за відповідною теоремою Форда-Фалкерсона величина

[1] Fulkerson, D.R. and Dantzig G.B. Computation of Maximal Flows in Networks and
Ford L.R. and Fulkerson D.R. Maximal Flow Through a Network. The RAND Corp. RM-1400, 1954.

максимального потоку дорівнює значенню мінімального перерізу, при цьому зберігається цілочисловий розв'язок за початковими даними у цілих числах.

Для задачі *MMF*, яка краще відповідає реальній практиці, все інакше, пошук рішення та його аналіз для неї значно складніші. Її актуальність пов'язана із серйозною проблемою раціонального каналізування незмішуваних *K* продуктів різної природи, властивостей і необхідної орієнтації («що – звідки – куди – скільки») у комунікаційних каналах з обмеженими пропускними здатностями та вимогами використання. У мережах, де одними каналами передаються різні потоки, завжди є критичні зони, т.зв. «вузькі місця», заздалегідь відомі, щойно утворені за різних причин чи знайдені розрахунками, де потоки конфліктують, від утворення заторів до ситуацій з трагічними наслідками, в результаті обмежуються та стримуються не лише локальні, але й повний потік аж до його припинення[2].

Ці зони мають різний склад і конфігурацію, від окремої дуги до підмережі і усієї мережі, вони природні чи штучні, але мета з управління такими потоками одна — локалізувавши ці зони, треба визначити та прийняти зважене рішення щодо формування оптимальних конфігурацій у мережі додаванням/видаленням дуг/вузлів із розрахованими параметрами, а для оперативного персоналу ще й показати ці конфігурації на карті [7, 8].

Аналіз фундаментальних видань і новітніх публікацій з проблематики мережевої оптимізації підтверджує, що задача є надзвичайно розповсюдженою, бо має безліч застосувань, інтерес до неї лише зростає із-за невпинної появи/реконструкції однорідних і комплексних мережевих структур з потоками звичайних чи специфічних продуктів. Основний акцент припадає на алгоритмічні підходи до пошуку рішень, зокрема, на розробку евристик для задач великого розміру, які реалізуються мовними засобами спеціального ПЗ.

Затребуваними практикою є також поглиблені аналітичні дослідження, що направлені на використання сучасного та доступного інструментарію для задач цього класу, наприклад, для ВНЗ і дослідницьких організацій чи для управлінських структур місцевого рівня, і ця робота одна з таких. Перевага таких досліджень — можливість експериментально формувати різноманітні оптимізаційні моделі для проведення пошукових обчислень з варіацією обмежень на шукані змінні, структур і типів даних, форматів отриманих результатів, що виводяться на екрани АРМ.

Відомо, що розв'язок поставленої і непростої потокової задачі для розгалуженої мережі, яка невпинно розвивається та вдосконалюється, це основа формування поточного чи навіть стратегічного плану розвитку звичайних і спеціальних комунікацій, де точково враховуються і оперативно налаштовуються знайдені «вузькі місця», та послідовно реалізується розрахована реконфігурація мережі.

Тож за результатами комп'ютерного моделювання процес мережевого каналізування потоків має бути організованим якнайкраще за відповідними критерія-

[2] зміст [1] — відкрита частина спільного секретного проекту ВПС США і науково-дослідної корпорації RAND про задачу пошуку максимального потоку у мережі, поставлену в період «холодної війни» США-СРСР і яка має за мету відшукати набір дуг (реально, ділянок залізниці), названий мінімальним перетином, видалення якого (силами ВПС) перериває залізничне сполучення між СРСР і державами Варшавського договору. Розсекречений завершальний звіт: T.E. Harris, F.S. Ross. Fundamentals of a Method for Evaluation Rail Net Capacities. RAND Corp., RM-1573, 1955, 63 p. (Основи методу оцінювання пропускної здатності залізничної мережі)

ми та допустимими нормами, зазвичай, оптимально із загальними мінімальними витратами. У цій роботі реалізація цього процесу базується на відповідних моделях мережевої оптимізації і доступних інструментальних засобах.

Задача про максимальний *K*-продуктовий мережевий потік

У класичній 1-продуктовій задачі про максимальний потік мережею, якій повністю присвячені роботи [1, 3], фундаментальним результатом є знайдений мінімальний переріз (*min cut*), який визначає «вузьке місце» — множину насичених дуг, видалення яких розділяє джерело та стік, збільшення саме їхньої пропускної здатності гарантовано приведе до збільшення максимального потоку (на величину знайденої тіньової ціни дуг цієї множини).

У значно складнішій *K*-продуктовій задачі про максимальний потік мережею аналогом мінімального перетину названа *розділова множина* (РМ) — множина дуг, що розмежовує стоки та джерела всіх продуктів. Але при цьому максимальний багатопродуктовий потік буде меншим за величину РМ, а значення шуканих потоків втратять властивість цілочисельності, якщо користуватися не спеціальним алгоритмом, а симплекс-методом лінійного програмування із шуканими невідомими дійсного типу. При вимушеному збереженні цієї властивості за додатковим обмеженням маємо модель цілочислового програмування, де максимальний потік стане ще меншим і з іншою конфігурацією.

Постановка задачі

Уявимо ситуацію, коли в крупне місто з давньою історією, а це значить, що нові житлові масиви межують з кварталами попередніх періодів забудови і з історичним центром, і де є не лише широкі проїжджі частини, а й багато звичайних вулиць тощо, з різних *K* сторін в'їжджають транспортні засоби (машини), кожен з продукцією *k*-го постачальника, рухаються розгалуженою та складно організованою системою дорожнього руху та виїжджають з міста до споживачів цієї продукції з тих чи інших сторін. Зазвичай проблемою є рух саме міськими дорогами, вона ускладнюється, якщо машина має певні особливості щодо габаритів, ваги чи вантажу або ж коли завчасно не повідомлено про заборонені зони чи території, які треба минати тощо.

Отже, задано мережу (N, A), ненаправлені дуги представлено парами направлених назустріч дуг, можливо, з різними пропускними здатностями (ПЗ). Кожна дуга змішаної (бо це сукупність ненаправлених, направлених і кратних дуг) дорожньої мережі має певну пропускну здатність (*capacity*), наприклад, кількість полос руху у відповідному напрямку руху. Треба визначити максимальну кількість машин, яку можна пропустити мережею від пунктів в'їзду до пунктів виїзду для кожного продукту.

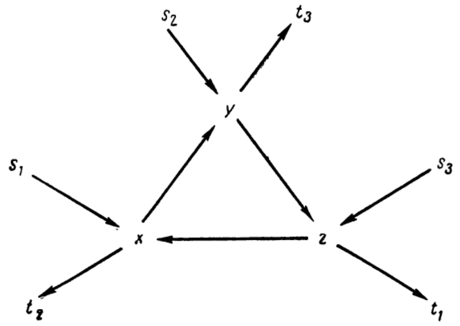
Для неподільних продуктів розв'язок має бути у цілих числах, інакше результат припускається у дійсних числах з дробами.

Змінна шуканого розв'язку та відповідного управлінського рішення — $f_k(i, j)$, $k = 1, \ldots, K$, — це потік *k*-го продукту, що тече (i, j)-ю дугою. Індивідуальні та сумарні потоки, окремо чи разом, обмежені зверху пропускними здатностями: $f_k(i, j) \le u_k(i, j), f(i, j) \le u(i, j)$.

Шуканий максимальний потік — це сума дугових потоків, що виходять з вузлів-джерел, чи входять у вузли-стоки, для всіх продуктів.

Приклад 1.

У [1], де мова йде про алгоритм розв'язання 1-продуктової задачі про максимальний потік і де доведено знамениту теорему «max flow-min cut» (1954 р.), про багатопродуктову версію цієї задачі авторами сказано чи не вперше[3], правда лише кілька заключних речень (бо розроблений алгоритм розставляння поміток для неї не діє), як про задачу на майбутнє. Розглянуто ілюстративний приклад 3-продуктової задачі з джерелами (*sources*) $s1$, $s2$, $s3$ і стоками (*terminals, targets*) $t1$, $t2$, $t3$. Дорожню мережу «міста» утворюють три вузли (x, y, z) і три направлені дуги ($x \to y$), ($y \to z$) та ($z \to x$), пропускна здатність усіх дуг дорівнює 1:



Наведено результат отриманого розрахунку (яким чином отриманий, не вказано), і цю задачу використаємо як тест. Для неї розроблено модель лінійного програмування і застосовано симплекс-метод, який реалізовано в надбудовах Excel Solver (Поиск решения) та OpenSolver.

Задача лінійної оптимізації

I. Знайти вектор дугових потоків $f = \{f_k(i, j)\}$ такий, щоб

II. ЦФ $\sum_k f_k(i,j) \to \max$

III. за обмежень:

$$\sum_{(i,j)} f_k(i,j) \le u(i,j) \quad \forall (i,j) \in A,$$

$$\sum_{i,j} f_k(i,j) = \begin{cases} f(i,j), & i = s \\ 0, & j \ne s,t \\ -f(i,j), & j = t \end{cases},$$

$f_k(i, j) \ge 0.$

Результат

Розв'язок прямої задачі лінійного програмування — шляхи потоків продуктів (потік):

[3] Ford L.R., Fulkerson D.R. A suggested computation for maximal multicommodity network flows. *Manag. Sci.* 1958. Vol. 5. P. 97–101.

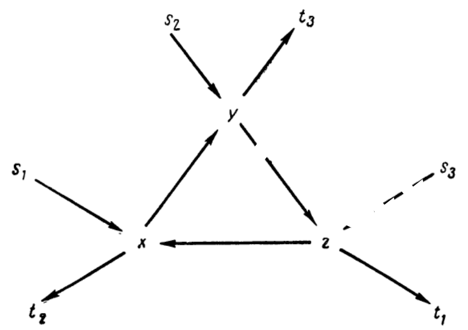
$s1 \to x \to y \to z \to t1$ (0,5);
$s2 \to y \to z \to x \to t2$, (0,5);
$s3 \to z \to x \to y \to t3$, (0,5);
максимальний 3-продуктовий потік дорівнює 1,5.

Аналіз

Вихідні дуги вузлів-джерел і вхідні дуги стоків з одиничними ПЗ спроможні загалом відправити та прийняти 3 одиниці всіх продуктів, але із-за дугових обмежень «міста» вийшло лише 1,5 од. Кожна дуга «міста» насичена, ними пропущена сумарно одиниця потоків двох продуктів: дугою ($x \to y$) — продукти з $s1$ та $s3$, дугою ($y \to z$) — з $s1$ та $s2$, дугою ($z \to x$) — з $s2$ та $s3$ до відповідних стоків, тож ці три дуги — претенденти належати до РМ.

Належність дуг до РМ визначають тіньові ціни їхніх дугових потоків — це додатні числа, які вказують на можливість збільшення шуканого максимального потоку при збільшенні пропускної здатності дуги на 1.

Там же показано, що у заданій мережі для РМ достатньо двох дуг: (y, z) та (x, y) відповідно, мінімальне значення РМ дорівнює 2, тобто, в 3-продуктовій задачі максимальний потік менший за мінімальний переріз. Видалення цих двох дуг приведе до ситуації, де перериваються всі зв'язки «джерело-стік»:



В інших варіантах розв'язку можливі інші пари дуг, включно із дугою (z, x).

Реалізація моделі в Excel

Отримано двоїсті оцінки (тіньові ціни) зі значенням 0,5 для кожної із трьох дуг «міста», чим підтверджується, що:

— у загальному випадку з урахуванням їхньої ПЗ вони втрьох утворюють «вузьке місце» — розділову множину зі значенням 3, надаючи потенціальну можливість збільшити максимальний потік;

— збільшення ПЗ певної з них на 1 збільшить максимальний потік на 0,5 (за умови збереження структури оптимального плану).

Шляхом внесення змін (модифікації) у побудовану модель можна її адаптувати до певних спеціальних умов (рішень ОПР, завдань).

Модифікація моделі

Умова 1. Рішення: збільшити ПЗ дуги (z, x) на 1.

Результат: потік продукту 1 зникає, максимальний потік зріс на 0,5 і дорівнює 2, РМ = 4.

Умова 2. Завдання: отримати цілочисловий розв'язок.

Дія: додати обмеження: усі шукані невідомі цілого типу.

Модель цілочислового програмування.

Результат: залишається лише потік продукту 1, дуга (z, x) вільна, максимальний потік дорівнює 1, РМ = 2.

Приклад 2.

У [2] алгоритмом переборного типу розв'язано 2-продуктову задачу про максимальний потік у ненаправленій мережі як спеціальну задачу аби довести, що лише для такої постановки — про потоки 2 продуктів — справедливою залишається теорема для 1-продуктової задачі: максимальний потік *дорівнює* мінімальному перерізу (у цілих числах). Користуємося цим прикладом як тестом запропонованої моделі лінійного програмування.

Задано ненаправлену 2-продуктову мережу (рис. 1), що складається із 10 вузлів і 30 дуг, з них 8 направлених 24 ненаправлених, вузли 1 та 2 — джерела, 1′ та 2′ — стоки, 3÷8 — проміжні, для дуг задані пропускні здатності, для ненаправлених дуг — вони симетричні.

Результат

Пряма задача

Максимальний потік склав величину 10 од., де: потік 1-го продукту — 6 од., 2-го продукту — 4 од., усі потоки цілочислові, результат співпав з наведеним у [2]. Розрахунками підтверджено висновок, що лише для 2-продуктової задачі справедлива класична теорема із [1]. Розподіл потоків продуктів окремо і разом показано на рис. 2.

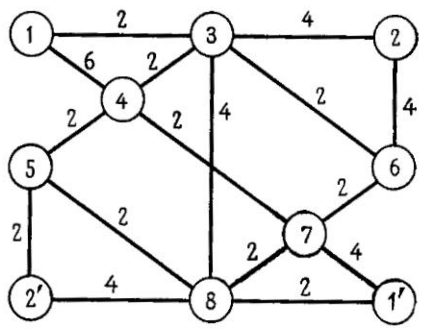


Рис. 1. Мережа 2-продуктової задачі із [2]

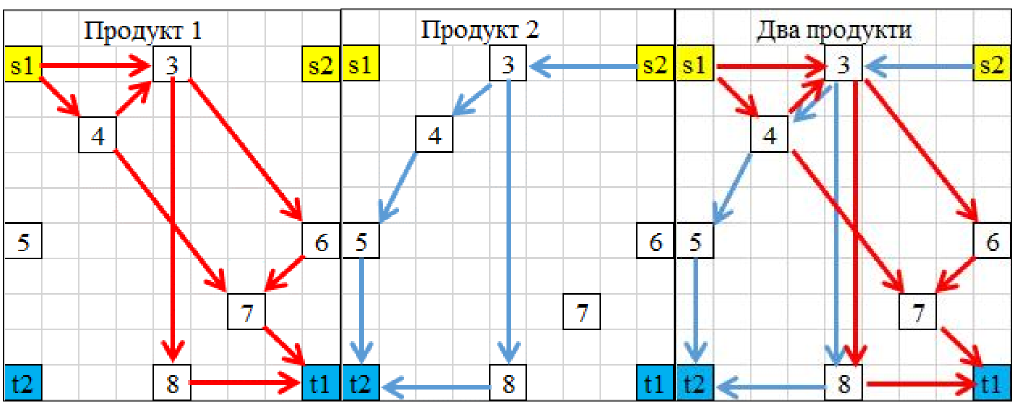
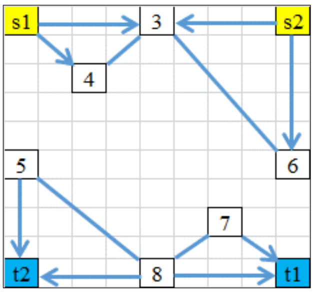


Рис. 2. Розподіл потоків



Двоїста задача

Оскільки в [2] її розв'язок відсутній із-за використання там алгоритму переборного типу і, відповідно, мінімальний перетин не визначено, то зробити це — наша задача.

Мінімальний перетин — дуги (ПЗ): 3→8 (4), 4→5 (2), 4→7 (2), 6→7 (2) = 10.

Видалення цих дуг відокремлює джерела та стоки.

Приклад 3.

Відшукується максимальний 3-продуктовий потік у змішаній мережі (рис. 3), яка складається із 6 + 15 = 21 вузла та 6 + 44 = 50 направлених дуг з одиничними пропускними здатностями.

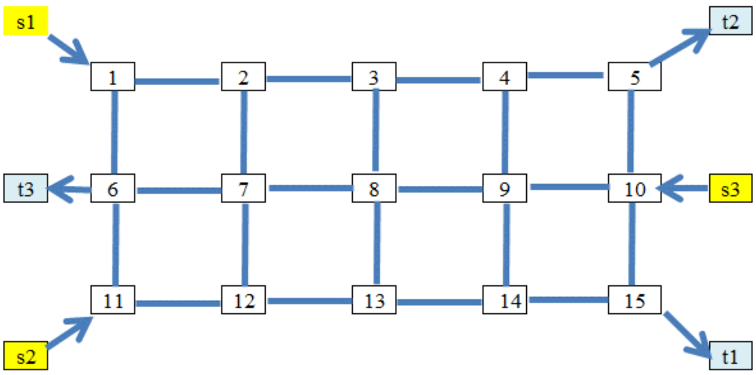


Рис. 3. 3-продуктова мережа (21, 50)

Отриманий результат продемонстровано на рис. 4.

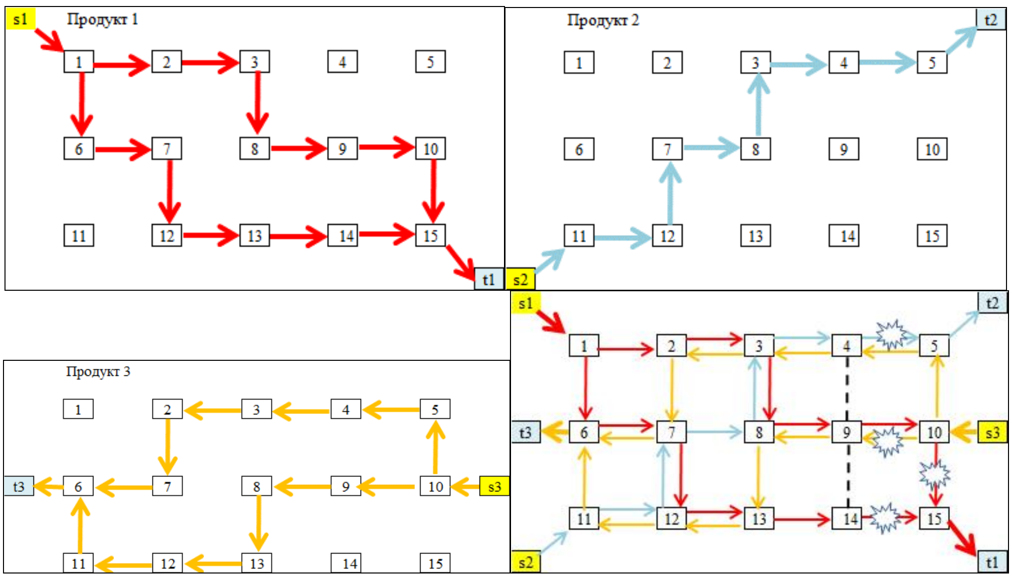


Рис. 4. Потоки продуктів: окремо, разом, символ — розділова множина

Висновок

Розроблена методика моделювання задачі про максимальний *K*-продуктовий потік дозволяє досліджувати практичні мережеві ситуації, що зводяться до лінійної моделі, маючи можливість, на відміну від евристичних (наближених) алгоритмів переборного типу, автоматично та точно визначати розділову множину, критичну зону, до визначення якої часто прикуто основну увагу. Ця методика не вимагає додаткових інструментальних засобів чи вміння програмувати, тому є досконалим програмним продуктом для навчально-дослідницької роботи у будь-якій сфері інформаційно-аналітичної діяльності.

1. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях/пер. с англ. Москва: Мир, 1966. 276 с.

2. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях/пер. с англ. Москва: Мир, 1974. 520 с.

3. Фрэнк Г., Фриш И. Сети, связь и потоки/пер. с англ. Москва: Связь, 1978. 449 с.

4. Ahuja R., Magnanti T., Orlin J. Network Flows. Theory, Algorithms, and Applications. Prentice Hall, 1993. 863 p.

5. Додонов О.Г., Кузьмичов А.І. Модель «max-min» у задачах захисту об'єктів комунікаційних мереж. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2009. Т. 11. № 4. С. 78–88.

6. Gass S., Fu M. (eds.). Encyclopedia of Operations Research and Management Science, 3-d ed. Springer, 2013. 1662 p.

7. Кузьмичов А.І., Додонов Є.О. Оптимізаційні моделі реконфігурації мережевих структур. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2017. Т. 19. № 2. С. 24–35.

8. Додонов О.Г., Додонов В.О., Кузьмичов А.І. Візуальна підтримка оптимальних рішень у просторових мережах. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2017. Т. 19. № 4. С. 16–25.

9. Кузьмичов А.І. Аналітика мережевих структур. Київ: Ліра-К, 2018. 208 с.

Надійшла до редакції 12.06.2018