УДК 621.391:519.2

О. В. Мезенцев
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Спосіб скорочення обчислення параметра виявлення на виході багатоканального пристрою оптимальної просторово-часової обробки сигналів

Запропоновано новий спосіб визначення вихідного значення критерію відношення сигнал/(завада+шум) для оптимальної просторово-часової обробки сигналів на фоні завад різного походження в умовах великої кількості просторових і часових каналів прийому, що дозволяє підвищити швидкодію спецобчислювачів радіолокаційних станцій.

***Ключові слова**: просторово-часова обробка сигналів, кореляційна матриця, відношення сигнал/(завада+шум), активні та пасивні завади, комбіновані завади, розмірність, просторові та часові канали прийому.*

Сучасні й перспективні радіолокаційні станції (РЛС) повинні забезпечувати отримання радіолокаційної інформації у складній, динамічній завадовій обстановці. На сучасному етапі найбільш широко використовуються активні шумові та пасивні маскувальні завади, а також їхня адитивна суміш (комбіновані завади).

Оптимальна (сумісна) просторово-часова обробка сигналів на фоні завад передбачає комплексне використання всіх можливих різниць (просторових, часових, полярізаційних тощо) корисних сигналів і завад [1, 3]. Однак реалізація такої обробки є виключно складною, а інколи й неможливою із-за вартісних і обчислювальних обмежень. Останні пов'язані з великою розмірністю задачі, яка визначається добутком числа просторових каналів прийому M на число часових каналів прийому L, кожне з яких може бути достатньо великим (особливо в умовах багатоелементної фазованої антенної решітки). Ще більші труднощі пов'язані з необхідністю оцінки й обертання апріорі невідомої просторово-часової кореляційної матриці (КМ) завад Φ розмірністю ($ML\times ML$). Взагалі число операцій, потрібних для обертання такої КМ, пропорційно $(ML)^3$ [2].

Розглянемо можливість скорочення числа операцій при обчислюванні значення параметра виявлення, відомого як відношення сигнал/(завада+шум) q^2 для великих значень M — числа просторових каналів прийому і L — числа часових каналів прийому [1]

$$q^2 = X^*\psi X\ , \tag{1}$$

де * — символ ермітового сполучення; $X = \left\{x_m\right\}_{m=1}^{ML}$ — вектор комплексних амплітуд очікуваного корисного сигналу; $\psi = \left\{\psi_{ij}\right\}_{i,j=1}^{ML} = \varPhi^{-1}$ — матриця, яка зворотня кореляційній матриці (КМ) завад $\varPhi$.

У формулі (1) розмірність кореляційної матриці $\psi = \left\{\psi_{ij}\right\}_{i,j=1}^{ML}$ при оптимальній (сумісній) просторово-часовій обробці дорівнює ($ML \times ML$), що в умовах багатоелементної фазованої антенної решітки (переважно великої розмірності числа M), а також при обертанні матриці такої розмірності робить таку операцію досить складною. Слід зауважити, що наразі ця матриця апріорі нам невідома, тобто потрібен час на її адаптивну обробку, що теж накладає певні труднощі. Розмірність вектора комплексних амплітуд очікуваного корисного сигналу для оптимальної просторово-часової обробки сигналу на фоні завад також дорівнює ML, що теж підвищує кількість операцій обчислень.

Перш ніж розглядати можливість скорочення числа операцій обчислення, приймемо певні умови та припущення. Будемо розглядати прийом вузькосмугового сигналу з випадковою амплітудою і початковою фазою, коли можна не враховувати запізнювання огибаючої на апертурі, а для вектора X використовувати вираз [1, 2]

$$X = x(k) X_{\times} \otimes X(\alpha), \tag{2}$$

де $\otimes$ — символ кронекерівського множення [2]; $x(k)$ — випадковий амплітудний множник; $X(\alpha) = \left\{x_i^{(\Pi P)}\right\}_{i=1}^{M}$ та $X_{\times} = \left\{x_l^{(\times)}\right\}_{l=1}^{L}$ — вектори амплітудно-фазових розподілів (АФР) корисного сигналу відповідно за простором і часом.

Кореляційна матриця (КМ) завад $\varPhi$ має вигляд

$$\varPhi = \varPhi_{Ш} + \varPhi_{A\times} \otimes \varPhi_{A\Pi P} + \varPhi_{\Pi\times} \otimes \varPhi_{\Pi\Pi P}, \tag{3}$$

де $\varPhi_{Ш} = \sigma_{Ш}^2 I_L \otimes I_M$ — КМ власних шумів каналів прийому з дисперсією (потужністю) $\sigma_{Ш}^2$; I_M та I_L — одиничні матриці відповідно розміром $(M \times M)$ і $(L \times L)$; $\varPhi_{A\times} = \left\{\varphi_{A\times kn}\right\}_{k,n=1}^{L}$ та $\varPhi_{\Pi\times} = \left\{\varphi_{\Pi\times kn}\right\}_{k,n=1}^{L}$ — $(L \times L)$ КМ активних і пасивних завад на виходах L часових каналів прийому; $\varPhi_{A\Pi P} = \left\{\varphi_{A\Pi P}^{(ij)}\right\}_{i,j=1}^{M}$ та $\varPhi_{\Pi\Pi P} = \left\{\varphi_{\Pi\Pi P}^{(ij)}\right\}_{i,j=1}^{M}$ — просторові $(M \times M)$ КМ активних і пасивних завад відповідно.

Будемо вважати, що активні шумові завади створюються N точечними незалежними джерелами, так що [1]

$$\varPhi_{A\Pi P} = FhF^{*}, \tag{4}$$

де $F = \left\{F_{\nu}\right\}_{\nu=1}^{N}$ — матриця, яка створена з M-мірних комплексних векторів F_{ν}, що описують АФР поля на розкриві антенної решітки; $h = \left\{ h_{\nu} \right\}_{\nu=1}^{N}$ — $(N \times N)$ діагональна матриця відносних (відносно до шуму) інтенсивностей активних завад.

Ця можливість базується на максимальному врахуванні специфіки матриці Φ і вектора X квадратичної форми (1).

Почнемо з урахування специфіки КМ Φ. Для визначеності оберемо типову ситуацію, коли активні завади взаємно некорельовані у часових, а пасивні завади — у просторових каналах прийому, тобто

$$\Phi_{A\times} = I_L \quad \text{та} \quad \Phi_{ППР} = I_M .$$

У цьому випадку КМ Φ (3) прийме вигляд

$$\Phi = I_{LM} + I_L \otimes \Phi_{АПР} + \sigma_{П}^2 \Phi_{П\times} \otimes \mathrm{I}_M . \tag{5}$$

де $I_{LM} = I_L \otimes I_M$.

Позначимо: $A = I_{LM} + I_L \otimes \Phi_{АПР}$, $S = \sigma_{П}^2 \Phi_{П\times}$, $P = \mathrm{I}_M$, де $\sigma_{П}^2$ — дисперсія ПЗ. Тоді (5) запишемо наступним чином:

$$\Phi = A + S \otimes P . \tag{6}$$

Відповідно до відомої формули обертання матриць [2], матриця ψ, яка зворотна матриці Φ (6), має вигляд:

$$\psi = \Phi^{-1} = A^{-1} - A^{-1}(I_{LM} + S \otimes PA^{-1})^{-1} S \otimes PA^{-1} . \tag{7}$$

Використовуючи (4), представимо матрицю A у вигляді $A = I_L \otimes (I_M + FhF^*)$. Тоді:

$$A^{-1} = I_L \otimes (I_M + FhF^*)^{-1} = I_L \otimes \psi_A , \quad \text{де} \quad \psi_A = (I_M + FhF^*)^{-1} .$$

Розглянемо вираз у дужках (7):

$$(I_{LM} + \sigma_{П}^2 \Phi_{П\times} \otimes I_M I_L \otimes \psi_A)^{-1} . \tag{8}$$

Враховуючи відому властивість кронекерівського множення матриць [2]

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD) , \tag{9}$$

перепишемо вираз (8) у такий спосіб:

$$(I_{LM} + \sigma_{П}^2 \Phi_{П\times} \otimes \psi_A)^{-1} . \tag{10}$$

Представимо КМ $\Phi_{\Pi\times}$ та ψ_A у вигляді

$$\Phi_{\Pi\times} = H\lambda H^*, \quad \psi_A = U\mu^{-1}U^*, \tag{11}$$

де H, U — унітарні матриці власних векторів КМ $\Phi_{\Pi\times}$ і ψ_A відповідно; λ, μ — діагональні матриці власних чисел КМ $\Phi_{\Pi\times}$ і ψ_A відповідно.

Враховуючи (9) і (11), перепишемо (10) наступним чином:

$$\begin{gathered}\left[I_{LM} + \sigma_\Pi^2 H \otimes U\lambda \otimes \mu^{-1}H^* \otimes U^*\right]^{-1} = \left[H \otimes U(I_{LM} + \sigma_\Pi^2 \lambda \otimes \mu^{-1})H^* \otimes U^*\right]^{-1} = \\ = H^{-*} \otimes U^{-*}(I_{LM} + \sigma_\Pi^2 \lambda \otimes \mu^{-1})H^{-1} \otimes U^{-1}.\end{gathered} \tag{12}$$

Підставимо (12) у (7) і отримаємо:

$$\begin{gathered}\psi = I_L \otimes \psi_A - I_L \otimes \psi_A H^{-*} \otimes U^{-*}(I_{LM} + \sigma_\Pi^2 \lambda \otimes \mu^{-1})^{-1} H^{-1} \otimes U^{-1} \sigma_\Pi^2 \Phi_{n\times} \otimes I_M I_L \otimes \psi_A = \\ = I_L \otimes \psi_A - I_L \otimes \psi_A H \otimes U(I_{LM} + \sigma_\Pi^2 \lambda \otimes \mu^{-1})^{-1} H^* \otimes U^* \sigma_\Pi^2 (H \otimes U\lambda \otimes \mu^{-1} H^* \otimes U^*).\end{gathered}$$

Можна показати, що при винесенні $(I_L \otimes \psi_A)$ з останнього виразу в дужках:

$$\psi = I_L \otimes \psi_A \left[I_{LM} - \sigma_\Pi^2 H \otimes U(\lambda^{-1} \otimes \mu + \sigma_\Pi^2 I_{LM})^{-1} H^* \otimes U^*\right].$$

Позначимо $B = \lambda^{-1} \otimes \mu; A = \sigma_\Pi^2 I_{LM}$ для розкладання останнього виразу у дужках за формулою [2]:

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1} A^{-1}.$$

Тоді (7) прийме вигляд:

$$\begin{gathered}\psi = I_L \otimes \psi_A \left[I_{LM} - \sigma_\Pi^2 H \otimes U(\frac{1}{\sigma_\Pi^2} I_{LM} - \frac{1}{\sigma_\Pi^2} I_{LM}(\frac{1}{\sigma_\Pi^2} I_{LM} + \lambda \otimes \mu^{-1})^{-1} \frac{1}{\sigma_\Pi^2} I_{LM}) H^* \otimes U^*\right] = \\ = \frac{1}{\sigma_\Pi^2} I_L \otimes \psi_A H \otimes U(\frac{1}{\sigma_\Pi^2} I_{LM} + \lambda \otimes \mu^{-1})^{-1} H^* \otimes U^*.\end{gathered}$$

Відповідно до визначення (11) $\psi_A U = U\mu^{-1}$, отримаємо:

$$\begin{gathered}\psi = \frac{1}{\sigma_\Pi^2} H \otimes U\mu^{-1}(\frac{1}{\sigma_\Pi^2} I_{LM} + \lambda \otimes \mu^{-1})^{-1} H^* \otimes U^* = \\ = \frac{1}{\sigma_\Pi^2} H \otimes U(I_L \otimes \mu^{-1})(\frac{1}{\sigma_\Pi^2} I_{LM} + \lambda \otimes \mu^{-1})^{-1} H^* \otimes U^*.\end{gathered}$$

Представимо, що завдяки відомій властивості кронекерівського добутку $H \otimes U\mu^{-1} = (H \otimes U)(I_L \otimes \mu^{-1})$

$$\psi = \frac{1}{\sigma_\Pi^2} H \otimes U \left[\frac{1}{\sigma_\Pi^2} I_{LM} I_L \otimes \mu + \lambda \otimes \mu^{-1} I_L \otimes \mu \right]^{-1} H^* \otimes U^* =$$
$$= H \otimes U \left[I_L \otimes \mu + \sigma_\Pi^2 \lambda \otimes I_M \right]^{-1} H^* \otimes U^*. \qquad (13)$$

Вираз (13) дозволяє зменшити кількість обчислювань порівняно з (7), однак розмірність ($ML \times ML$) КМ ψ збереглась і, крім того, кількість обчислювальних операцій з власними числами і власними векторами КМ $\Phi_{\Pi\times}$ і ψ_A є достатньо великою. На підставі виразу для вектора X (2) і, враховуючи (9) і (13), вираз (1) приймає вигляд

$$q^2 = X_x^* \otimes X(\alpha) H \otimes U D^{-1} H^* \otimes U^* X_\times \otimes X(\alpha),$$

де $D = I_L \otimes \mu + \sigma_\Pi^2 \lambda \otimes I_M$.

Враховуючи (9), відношення сигнал/(завада+шум) набуде вигляду:

$$q^2 = X_x^* H \otimes X^*(\alpha) U D^{-1} H^* X_\times \otimes U^* X(\alpha) = Z_\times^* \otimes Z_{\Pi P}^* D^{-1} Z_\times \otimes Z_{\Pi P},$$

де

$$Z_\times = H^* X_\times, \quad Z_{\Pi P} = U^* X(\alpha). \qquad (14)$$

Позначимо

$$Z_K = \left\{ z_k \right\}_{k=1}^{L}, \quad z_k = z_{K\times} z_{\Pi P}, \qquad (15)$$

де z_k — k-й M-мірний блок вектора $Z = Z_\times \otimes Z_{\Pi P}$.

Перепишемо вираз для q^2:

$$q^2 = \sum_{K=1}^{L} Z_K^* D_K^{-1} Z_K = \sum_{K=1}^{L} \left| Z_{K\times} \right|^2 Z_{\Pi P}^* D_K^{-1} Z_{\Pi P} = X^*(\alpha) \left[\sum_{K=1}^{L} \left| Z_{K\times} \right|^2 U D_K^{-1} U^* \right] X(\alpha). \qquad (16)$$

Позначимо $T^{(K)} = D_K^{-1}$. Тоді вираз у дужках для (16) прийме вигляд

$$UT^{(K)}U^{*}=\sum_{K=1}^{M}t_i^{(K)}U_iU_i^{*}=\sum_{i=1}^{N}t_i^{(K)}U_iU_i^{*}+t_{N+1}^{(K)}\sum_{i=1}^{M}U_iU_i^{*}=\sum\left[t_i^{(K)}-t_{N+1}^{(K)}\right]U_iU_i^{*}+t_{N+1}^{(K)}I,$$

де $t_i^{(K)}=\dfrac{1}{\mu_i+\sigma_\Pi^2\lambda_K}$, $t_{N+1}^{(K)}=\dfrac{1}{1+\sigma_\Pi^2\lambda_K}$.

Таким чином, отримаємо

$$UD_K^{-1}U^{*}=U_{CK}T_KU_{CK}^{*}+t_{N+1}^{(K)}I, \tag{17}$$

де $U_{CK}=(u_1,u_2,\dots,u_N)$ — скорочена матриця власних векторів u; $T_K=diag\left\{t_i^{(K)}-t_{N+1}^{(K)}\right\}_{i=1}^{N}$.

Враховуючи (17), вираз (16) прийме вигляд:

$$\begin{aligned}q^2&=X^{*}(\alpha)\sum_{K=1}^{L}\left|Z_{K\times}\right|^2\left[U_{CK}T_KU_{CK}^{*}+t_{N+1}^{(K)}I\right]X(\alpha)=\\&=\sum_{K=1}^{L}\left|Z_{K\times}\right|^2X^{*}(\alpha)U_{CK}T_KU_{CK}^{*}X(\alpha)+X^{*}(\alpha)X(\alpha)\sum_{K=1}^{L}t_{N+1}^{(K)}\left|Z_{K\times}\right|^2\end{aligned} \tag{18}$$

Можна показати [2], що

$$U_{CK}=Fh^{1/2}WC,$$

де W — матриця власних векторів матриці $F^{*}Fh$.

Нормуючий множник C беремо за умовою [2]:

$$U_{CK}^{*}U_{CK}=I_N,$$

де I_N — одинична матриця розміром ($N\times N$); $U_{CK}^{*}U_{CK}=C^{*}W^{*}h^{1/2}F^{*}Fh^{1/2}WC=I_N$; $C^{*}\mu C=I$; $C^{-*}\mu^{-1}C^{-1}=I$; $\mu^{-1}=CC$; $C=\mu^{-1/2}$.

Тоді:

$$U_{CK}=Fh^{1/2}W\mu^{-1/2}. \tag{19}$$

Враховуючи (19), вираз (16) прийме вигляд:

$$\begin{aligned}q^2&=\sum_{K=1}^{L}\left|Z_{K\times}\right|^2X(\alpha)Fh^{1/2}W\mu^{-1/2}T_K\mu^{-1/2}W^{*}h^{1/2}F^{*}X(\alpha)+M\sum_{K=1}^{L}t_{N+1}^{(K)}\left|Z_{K\times}\right|^2=\\&=X^{*}(\alpha)Fh^{1/2}W\mu^{-1/2}\left[\sum_{K=1}^{L}\left|Z_{K\times}\right|^2T_K\right]\mu^{-1/2}W^{*}h^{1/2}F^{*}X(\alpha)+M\sum_{K=1}^{L}t_{N+1}^{(K)}\left|Z_{K\times}\right|^2,\end{aligned} \tag{20}$$

де [1]

$$F^* X(\alpha) = \frac{\sin\left[\dfrac{M}{2}(\alpha_K - \alpha_C)\right]}{\sin\left[\dfrac{1}{2}(\alpha_K - \alpha_C)\right]} = X^*(\alpha)F ,$$

де α_C — кутовий напрямок на ціль.

Позначимо в (20)

$$G = \mu^{-1/2} W^* h^{1/2} Q, \;\; \Phi_{СУМ} = \sum_{K=1}^{L} \left|Z_{K\times}\right|^2 T_K ,$$

де $Q = \left\{q_i\right\}_{i=1}^{N}$; $\quad q_i = \dfrac{\sin\left[\dfrac{M}{2}(\alpha_i - \alpha_C)\right]}{\sin\left[\dfrac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_C)\right]}$;

$T_K = diag\left\{\dfrac{1}{\mu_i + \sigma_П^2 \lambda_K} - \dfrac{1}{1 + \sigma_П^2 \lambda_K}\right\}_{i=1}^{N} = diag\left\{\dfrac{1-\mu_i}{(1+\sigma_П^2\lambda_K)(\mu_i + \sigma_П^2\lambda_K)}\right\}_{i=1}^{N}$ — діагональна матриця розміром $(N \times N)$.

Таким чином, отримуємо остаточний вираз для обчислення значення відношення сигнал/(завада+шум):

$$q^2 = G^* \Phi_{СУМ} G + M \sum_{K=1}^{L} \frac{\left|Z_{Kx}\right|}{1 + \sigma_П^2 \lambda_K} . \tag{21}$$

Тут $\Phi_{СУМ}$ та G мають розмірність $(N \times N)$, інші компоненти формули (21) є числами, тому розмірність обчислень значно зменшилась.

Висновки

Отриманий вираз відношення сигнал/(завада+шум) дозволяє зменшити кількість обчислювань для визначення необхідного значення параметра виявлення, тобто q^2 на виході багатоканального пристрою сумісної просторово-часової обробки сигналів на фоні завад різного походження при оцінці ефективності оптимальної (сумісної) обробки порівняно з (1). Фізично в кінцевому виразі розмірність матриць, що обробляються, дорівнює кількості діючих на РЛС джерел активних завад (*N*) і числу часових каналів *L* і не залежить від кількості просторових (*M*) каналів прийому, що істотно спрощує обчислювання, тому що $N << M$ та тим більш $N << ML$.

Формула (21) є вірною тільки за умов, якщо активні завади некорельовані у часових каналах прийому, а пасивні завади — у просторових каналах прийому, що досить часто має місце, але взагалі є спрощенням ситуації, особливо в умовах впливу комбінованих завад, тобто адитивної суміші активних і пасивних завад.

1. *Радиоэлектронные* системы: Основы построения и теория. Справочник; под ред. Я.Д. Ширмана. — [2-е изд., перераб. и доп.]. — М.: Радиотехника, 2007. — 512 с.: ил.

2. *Тыртышников Е.Е.* Матричный анализ и линейная алгебра: Курс лекций / Е.Е. Тыртышников. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 480 с.

3. *Довідник* з протиповітряної оборони / [Торопчин А.Я., Романенко І.О., Данник Ю.Г. та ін.]. — К.: МО України, Х.: ХВУ, 2003. — 368 с.

Надійшла до редакції 10.12.2012