УДК 621.391

А. В. Волошко, Т. Н. Лутчин
Институт энергосбережения и энергоменеджмента НТУУ «КПИ»
ул. Борщаговская, 115, 03056 Киев, Украина

Принцип определения информативных вейвлет-преобразованных значений в условиях неполноты восстановления исходной выборки

Предложен способ выбора информативных коэффициентов, полученных в результате вейвлет-преобразования, с целью поиска определенного значения из всей исходной выборки. Для поиска было исследовано дерево разложения, по которому установлены функциональные связи между исходными и преобразованными данными.

Ключевые слова: *вейвлет-преобразование, функциональные связи, поиск информативных значений.*

Введение

При исследованиях на практике часто применяется только одно либо несколько значений выборок. При этом, данные остальной выборки выступают в качестве избыточной информации. Для усовершенствования процедуры выбора информативных значений ранее применялся вейвлет-анализ, а именно аппарат кратномасштабного анализа, как описано в работе [1].

Анализ предыдущих исследований

В результате кратномасштабного анализа получается дерево разложения сигнала, которое включает 2^m параметров составляющих вейвлет-коэффициентов на всех m уровнях преобразования. Для проведения анализа предварительно проверяется полнота исходной выборки (количество начальных значений должно равняться 2^m). В противном случае следует добавить «вспомогательные» нули, которые позволят воспользоваться кратномасштабным анализом. Образование такого количества величин позволяет расширить существующие способы восстановления исходного сигнала. При этом, в качестве базовых необязательно использовать коэффициенты последнего уровня [1], что является обязательным условием при проведении контроля измеряемых сигналов.

На сегодняшний день в теории вейвлет-анализа в основном разработаны подходы полного восстановления исходных выборок, например, алгоритм Малла [2], усеченные вейвлет-деревья [3]. Следует отметить, что вопросы частичного восстановления данных остаются узкопрофильными и практически неадаптируемы при изменении ограничивающих условий.

Цель работы — выявить функциональные зависимости между вейвлет-коэффициентами всех уровней разложения и исходными значениями в общем виде для формирования оптимальных выборок при решении задач неполного восстановления информации.

Материал и результаты исследований

В случае произвольного выбора значений для восстановления сигнала существует вероятность усложнения алгоритма расчета. При этом схема не загромождается избыточным количеством коэффициентов, но усложняется подбором новых способов решения, то есть возникает необходимость анализа коэффициентов всех уровней разложения. Предварительно зарезервировав несколько путей восстановления данных при возникновении сбоев передачи информации, можно достаточно просто установить этап несоответствия и исправить выборку данных.

Для восстановления исходного значения P_i сигнала предлагается модель с минимальным набором данных, при котором количество составляющих вейвлет-коэффициентов равно количеству уровней вейвлет-разложения:

$$P_i = f(N\left(k_{m,n}\right) = m),$$

где $k_{m,n}$ — вейвлет-коэффициент с порядковым номером n в пределах m-го уровня вейвлет-разложения.

Представленный вид выбора данных в ряде случаев может вносить погрешность.

Для оптимального выбора параметров (без потери точности с минимальным объемом информации) учитывается структура функциональных связей вейвлет-коэффициентов, отображающая взаимосвязи между преобразованными данными на всех уровнях разложения, которые проще устанавливать при анализе вертикальной и горизонтальной структуры дерева. Для примера рассмотрим четырехуровневую схему вейвлет-разложения, представленную на рис. 1.

Примечание. *Все дальнейшие зависимости и подходы к выбору вейвлет-коэффициентов математически обоснованы и действительны для произвольного входного сигнала.*

Приведенная на рис. 1 схема отображает количество входных данных в составе преобразованных значений. Рассмотрим более детально уровни разложения сигнала. Из рис. 1 следует, что вейвлет-коэффициенты на первом уровне рассчитываются по двум значениям исходной выборки, второго уровня — по 4-м, третьего уровня — по 8-ми и так далее. Данный принцип сохраняется для преобразований с произвольным объемом выборок значений.

Для наглядного отображения общего принципа выбора информативных вейвлет-коэффициентов рассмотрим данные, приведенные на рис. 2.

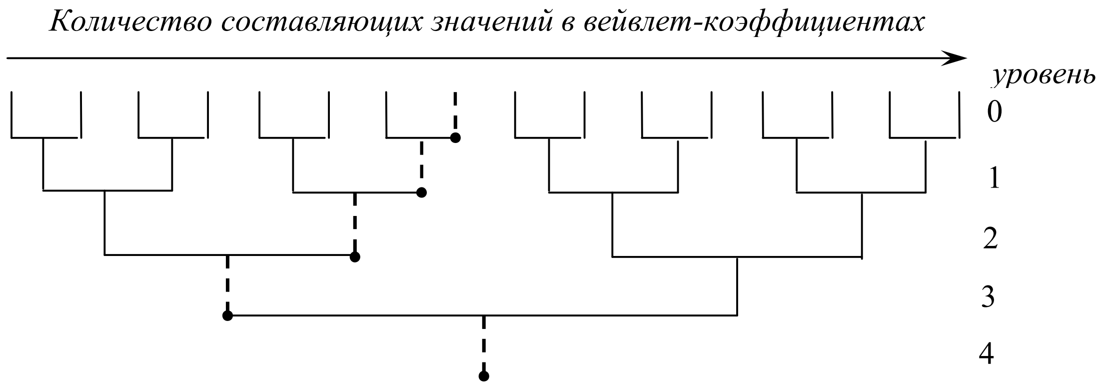

Рис. 1. Функциональная схема вейвлет-преобразования

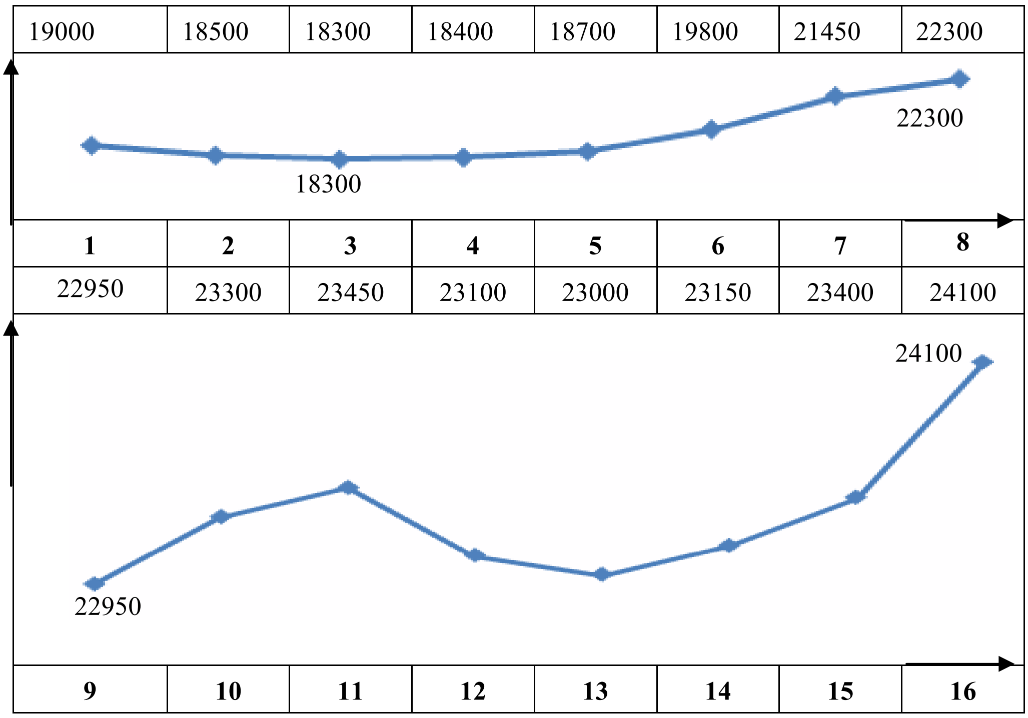

Рис. 2. Выборка исходных значений

Исходная выборка значений в дальнейшем подлежит вейвлет-обработке, а именно кратномасштабному анализу. В результате указанного преобразования начальные значения преобразуются в наборы вейвлет-коэффициентов, структура которых формирует дерево разложения (рис. 3).

Допустим необходимо восстановить восьмое значение исходной выборки. Из анализа дерева разложения следует, что на первом уровне данное значение будет входить в состав вейвлет-коэффициентов $k_{1,0}$ и $k_{1,1}$ в виде четвертой составляющей по порядку, на втором уровне — в виде второй, на третьем — первой и на последнем уровне будет входить в состав всех коэффициентов $k_{4,n}$ [4]. Наличие восьмого значения с учетом функциональных связей (рис. 1) между коэффициентами разложения на промежуточных уровнях отмечено знаком на рис. 3.

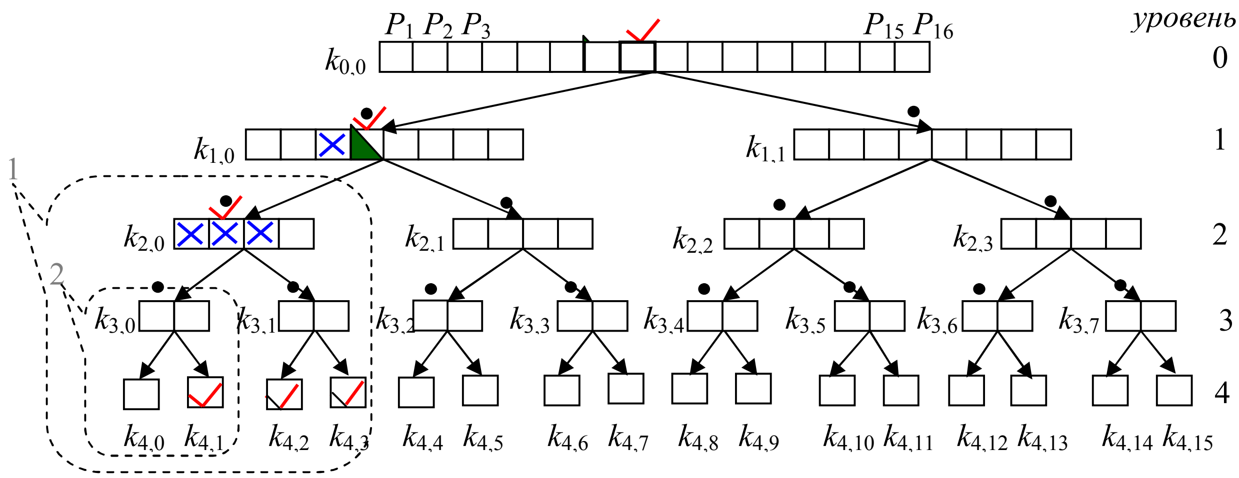

Рис. 3. Принцип восстановления исходного значения за счет информации, заложенной в вейвлет-коэффициентах всех уровней: — расчетный параметр;
— параметр, которым необходимо задаваться при расчете

В случае восстановления исходных значений «полезными» для расчета являются вейвлет-коэффициенты, которые содержат информацию об исходном значении. При восстановлении восьмого значения исходной выборки (рис. 3) рационально применять преобразованные коэффициенты, для которых характерна функциональная зависимость с искомой величиной (отмечены пунктирными линиями на рис. 1). Приведенный принцип формирования связей относится к потоковому построению: искомое значение является источником, а каждый уровень разложения представляет собой ступень, высота которого с увеличением *m* постоянно уменьшается. Согласно вышеизложенному принципу, исключается двойственность трактовки наличия исходных значений в составляющих вейвлет-коэффициентов.

Основное свойство обратного вейвлет-преобразования: если известны все компоненты вейвлет-коэффициентов *m*-го уровня, которые исходят из одного узла, то можно определить все компоненты вейвлет-коэффициента (*m* − 1)-го уровня, от которого происходит ветвление, например: $\{k_{4,2}; k_{4,3}\} \to k_{3,1}^{(1)}, k_{3,1}^{(2)}$, где индексы (1) и (2) — номер по порядку составляющей вейвлет-коэффициента.

Согласно [5], значения коэффициентов более высокого уровня (*m* – 1) восстанавливаются парой коэффициентов $c_{m,n}$ и $d_{m,n}$

$$C_{m-1,2n} = 1/\sqrt{2}\left(c_{m,n} + d_{m,n}\right), \tag{1}$$

$$C_{m-1,2n+1} = 1/\sqrt{2}\left(c_{m,n} - d_{m,n}\right), \tag{2}$$

и, соответственно, по данным коэффициентам можно восстановить исходные значения сигналов.

Рассмотрим возможные случаи восстановления значения (область 1 на рис. 3 с численными значениями ряда на рис. 4).

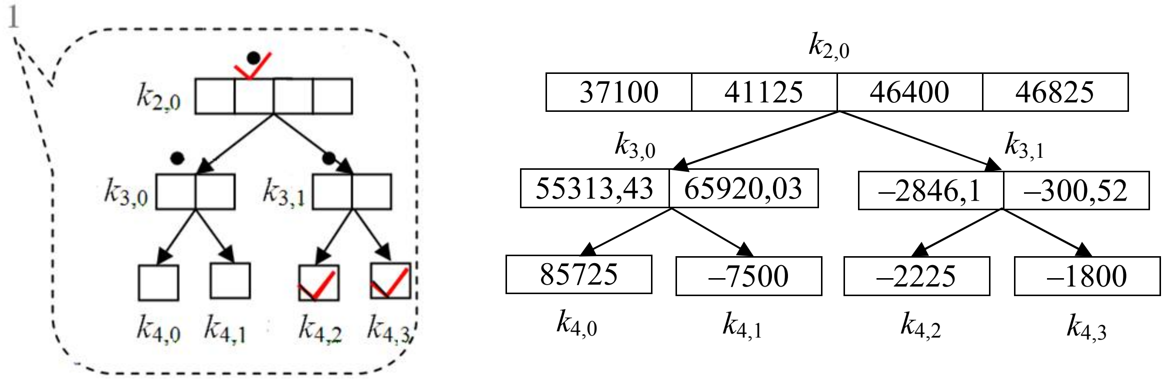

Рис. 4. Структурное построение и численные значения вейвлет-коэффициентов при неполном восстановлении

1. Дополнительно известны $k_{4,0}$ и $k_{4,1}$:

$$k_{3,0}^{(1)} = 1/\sqrt{2}\left(85725 + (-7500)\right) \approx 55313{,}43,$$
$$k_{3,0}^{(2)} = 1/\sqrt{2}\left(85725 - (-7500)\right) \approx 65920{,}03.$$

Процесс вычисления в левой ветви производится аналогично правой ветви, исходя из свойства обратного вейвлет-преобразования. Схема определения составляющей $k_{2,0}^{(2)}$ соответствует:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} k_{4,2} \\ k_{4,3} \end{array}\right\} \to k_{3,1} \begin{bmatrix} k_{3,1}^{(1)} \\ k_{3,1}^{(2)} \end{bmatrix} \\ \left.\begin{array}{l} k_{4,0} \\ k_{4,1} \end{array}\right\} \to k_{3,0} \begin{bmatrix} k_{3,0}^{(1)} \\ k_{3,0}^{(2)} \end{bmatrix} \end{array}\right\} \to k_{2,0} \begin{bmatrix} k_{2,0}^{(1)} \\ k_{2,0}^{(2)} \\ k_{2,0}^{(3)} \\ k_{2,0}^{(4)} \end{bmatrix}.$$

Так как для расчета на третьем уровне разложения не добавляются дополнительные значения, то фактически расчет вейвлет-коэффициентов $k_{3,1}^{(\cdot)}$ и $k_{3,2}^{(\cdot)}$ можно не проводить в виду их неинформативности (рис. 4), и сразу перейти от четвертого ко второму уровню (табл. 1).

Примечание. *Если при расчете участвуют вейвлет-коэффициенты разных уровней разложения сигнала, необходимо учитывать переход между уровнями* $1/2^l$. *Например, от четвертого уровня производится переход к третьему, тогда* $l = 1$, *если сразу ко второму —* $l = 2$.

Таблица 1. Расчет $k_{2,0}$ и его составляющих на основе вейвлет-коэффициентов последнего уровня

	$k_{4,0}$ = 85725	$k_{4,1}$ = –7500	$k_{4,2}$ = –2225	$k_{4,3}$ = –1800	Результат
$k_{2,0}^{(1)}$	+	+	+	+	37100
$k_{2,0}^{(2)}$	+	+	–	–	41125
$k_{2,0}^{(3)}$	+	–	+	–	46400
$k_{2,0}^{(4)}$	+	–	–	+	46825

Например, согласно второй строке табл. 1

$$k_{2,0}^{(1)} = l(k_{4,0} + k_{4,0} + k_{4,0} + k_{4,0}) / 4,$$

то есть

$$k_{2,0}^{(1)} = 2(85725 + (-7500) + (-2225) + (-1800)) / 4 = 37100.$$

Далее к рассмотрению принимаем область 2 на рис. 3.

2. Допустим, известен $k_{4,1}$ и $k_{3,0}^{(1)}$ либо $k_{3,0}^{(2)}$:

$$\left.\begin{matrix} k_{4,1} \\ k_{3,0}^{(1)} \end{matrix}\right\} \rightarrow k_{3,0}^{(2)}.$$

Согласно приведенной на рис. 1 схемы, правая ветвь области 1 принимает только косвенное участие в восстановлении исходного значения, которое содержится в $k_{2,0}^{(2)}$ и определяется по $k_{3,0}^{(1)}$ и $k_{3,0}^{(2)}$. Коэффициенты правой ветви применимы лишь в случае выделения информации об искомом значении из вейвлет-коэффициентов своего либо низшего уровня.

3. Изначально известна составляющая $k_{2,0}^{(1)}$ на искомом уровне. Дополнительно должны присутствовать сведения хотя бы об одном значении левой ветви. Возможные варианты в данном случае представлены на рис. 5.

Рис. 5. Способы восстановления значений по соседним вейвлет-коэффициентам

Примечание. *Знаки ∨ и ∧ обозначают соответственно либо выбор одного из двух соседних коэффициентов, либо обязательное использование как одного, так и второго коэффициента.*

Варианты, представленные на рис. 5, свидетельствуют о замкнутости связей в рассматриваемой системе (область 2 на рис. 3).

Обобщим принцип восстановления значений на высших уровнях вейвлет-разложения (табл. 2).

Таблица 2. Способы восстановления вейвлет-коэффициентов на высших уровнях разложения

$k_{3.0}^{(2)}$	$k_{4.0}$	$k_{4.1}$	$k_{3.1}^{(1)}$	$k_{3.0}^{(1)}$	$k_{4.2}$	$k_{4.3}$	$k_{3.1}^{(2)}$
√	√		√	√	√		√
√		√	√	√		√	√

Учитывая схемы прямого и обратного вейвлет-преобразований и данные табл. 2, определим $k_{2,0}^{(1)}$ на примере третьего случая:

$$k_{2,0}^{(1)} = \frac{k_{3,0}^{(1)} + \dfrac{k_{4,2}}{l} - k_{3,1}^{(2)}}{l}, \quad k_{2,0}^{(1)} = \frac{55313,43 + \dfrac{-2225}{\sqrt{2}} - \left(-300,52\right)}{\sqrt{2}} = 37100\,.$$

Определим составляющие, которые следует выбирать при дальнейшем восстановлении сигнала со второго уровня разложения. Согласно рис. 3 наиболее применимыми вариантами выступают $k_{2,1}^{(2)}$, $k_{2,2}^{(2)}$, $k_{2,3}^{(2)}$, но можно воспользоваться соседними составляющими первого уровня $k_{1,0}^{(3)}$ и $k_{1,0}^{(4)}$. При этом $k_{1,0}^{(4)}$ непосредственно содержит восьмое значение, а $k_{1,0}^{(3)}$ применимо для усечения избыточной информации в составляющей коэффициента низшего уровня $k_{2,0}^{(1)}$.

По своим свойствам составляющие вейвлет-коэффициентов не одинаково «полезны» для восстановления исходного значения. Так, например, $k_{2,0}^{(2)}$ и $k_{2,1}^{(2)}$, $k_{2,2}^{(2)}$ и $k_{2,3}^{(2)}$ хорошо подходят для восстановления сигнала, в тоже время составляющие вейвлет-коэффициентов, которые исходят из разных узлов, смешивать недопустимо. Такого рода действия приведут к неоднозначной трактовке функциональных связей, и как следствие — к переходу от неизбыточной модели восстановления сигнала к общей, в которой для нахождения исходного значения необходимое количество составляющих вейвлет-коэффициентов равняется количеству исходной выборки данных.

Таким образом, для оптимизации модели восстановления одного либо нескольких значений исходной выборки необходимо отслеживать функциональные связи между вейвлет-коэффициентами на всех уровнях разложения.

В качестве дополнительной рекомендации необходимо учитывать следующие ограничения при формировании выборки вейвлет-коэффициентов с применением дополнительных нулевых значений:

— между вейвлет-коэффициентами последнего шага вейвлет-преобразования согласно рис. 1 могут присутствовать взаимоисключающие зависимости;

— на текущих шагах вейвлет-преобразования влияние нулевых дополнительных начальных значений с учетом рис. 1, рис. 3 и выражений (1) и (2) проявится в виде нулевых и дублированных значений вейвлет-коэффициентов, которые при восстановлении данных необходимо исключать из выборки для повышения информативности.

При добавлении 25 % и более дополнительных нулевых значений от общей выборки все зависимости для восстановления значения остаются действительными, но принцип выбора вейвлет-коэффициентов, показанный на рис. 5, можно расширить и привести к следующей структурной схеме, приведенной на рис. 6.

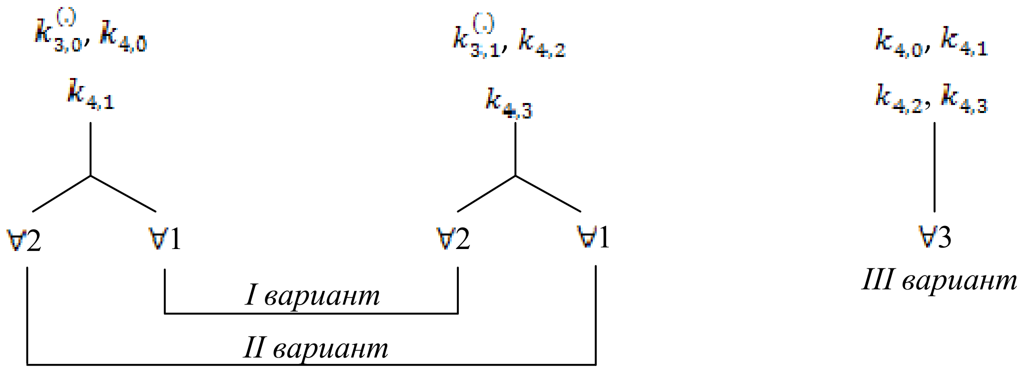

Рис. 6. Варианты выбора вейвлет-коэффициентов

Рассмотрим принцип восстановления $k_{2,0}^{(2)}$ на примере второго варианта. Знак ∀2 указывает на возможность произвольного выбора двух из трех вейвлет-коэффициентов $k_{3,0}^{(\cdot)}, k_{4,0}, k_{4,1}$. Далее согласно знаку ∀1 из второго набора $k_{3,1}^{(\cdot)}, k_{4,2}, k_{4,3}$ достаточно выбрать хотя бы одно значение.

Выводы

В результате анализа дерева разложения определены функциональные связи между вейвлет-коэффициентами разных уровней преобразования. Предложен подход для рационального выбора путей восстановления исходного значения. Разработаны рекомендации относительно ограничения способов поиска при начальном дополнении нулями первичной выборки.

1. *Daubechies I.* Ten Lectures on Wavelets / I. Daubechies. — Philadelphia: SIAM, 1991. — 392 p.

2. *Mallat S.* Wavelet Tour of Signal Processing / S. Mallat. — Paris: Academic Press, 1999. — 851 p.

3. *Иванов Б.Н.* Дискретная математика. Алгоритмы и программы. Расширенный курс / Б.Н. Иванов. — М.: Известия, 2011. — 512 с.

4. *Волошко А.В.* Локальне відновлення закодованої інформації / А.В. Волошко, Т.М. Лутчин: зб. наук. праць Ін-ту електродинаміки НАНУ. — 2010. — С. 93−97.

5. *Волошко А.В.* Методы и средства обработки сигналов и изображений / А.В. Волошко // Электроника и связь. — 2010. — Вып. 4. — С. 59–64.

Поступила в редакцию 24.09.2012