УДК 004.942

Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Общий случай изоморфизма коммутативных гиперкомплексных числовых систем и представления экспоненциальных функций в них

Рассмотрен метод определения изоморфизма гиперкомплексных числовых систем в случае наличия корней характеристического уравнения высокой кратности.

Ключевые слова: *гиперкомплексная числовая система, изоморфизм, экспонента, базис.*

Вступление

В работе [1] был рассмотрен вопрос изоморфизма таких коммутативных гиперкомплексных числовых систем (ГЧС), в наборе корней характеристического уравнения которых нет корней кратности выше второй. Напомним основные результаты, полученные в указанной работе.

1. Наборы корней характеристических уравнений ассоциированных систем линейных дифференциальных уравнений ГЧС могут быть использованы для решения вопроса об изоморфизме ГЧС.
2. Если наборы корней характеристических уравнений двух ГЧС равной размерности хотя бы одним элементом отличаются друг от друга, то эти ГЧС неизоморфны.
3. Если наборы корней характеристических уравнений двух ГЧС равной размерности, содержащие только однократные вещественные и (или) пары комплексно-сопряженных корней и различные вещественные корни кратности 2, имеют одинаковую структуру, то такие ГЧС изоморфны.
4. Если наборы корней характеристических уравнений двух ГЧС равной размерности имеют одинаковые структуры, но в них содержатся корни кратности выше 2, то судить об их изоморфизме только по виду наборов характеристических корней нельзя.

Именно решению задачи для последнего случая посвящена данная работа.

Постановка задачи

Задача определения изоморфизма двух ГЧС была подробно приведена в [1]. Но так как все обозначения и определения используются и в данной работе, то необходимо привести ее полностью.

Формулировка задачи определения изоморфизма двух ГЧС выглядит следующим образом.

Пусть заданы две канонические ГЧС размерности n с базисами $e = (e_1,...,e_n)$ и $f = (f_1,...,f_n)$ соответственно $\Gamma_1(e,n)$ и $\Gamma_2(f,n)$. Их таблицы умножения:

$$e_i \cdot e_j = e_k, \ \ i, j = 1,...,n \, ; \ k \in \overline{1,...,n} \cup e_k = 0 \, , \tag{1}$$

$$f_i \cdot f_j = f_k, \ \ i, j = 1,...,n \, ; \ k \in \overline{1,...,n} \cup f_k = 0 \, . \tag{2}$$

Оператор изоморфизма — матрица

$$L = \left(l_{ij}\right)_{i,j=1,...,n} : \, e_i = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} f_j \ . \tag{3}$$

Тогда условие изоморфизма заданных систем $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$ сводится к существованию нетривиального вещественного решения системы квадратичных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij} f_j \cdot \sum_{j=1}^{n} l_{sj} f_j = \sum_{j=1}^{n} l_{kj} f_j \bigcup 0 \, , \ \ i, s = 1,...,n \, ; \ \ k \in \overline{1,...,n} \tag{4}$$

при условии

$$\det(L) = \det\left(l_{ij}\right)_{i,j=1,...,n} \neq 0 \, . \tag{5}$$

Если в [1] изучался случай простых корней характеристических уравнений рассматриваемых ГЧС, то в данной работе исследуется общий случай кратности корней.

Метод определения изоморфизма в случае корней высокой кратности

Как показали наши исследования значительного прогресса в этом направлении можно добиться путем применения представлений экспоненциальных функций в ГЧС [1], что и отражено в основных результатах [2].

В дальнейшем будем считать, что кратность s корня характеристического уравнения равна размерности рассматриваемых ГЧС $\Gamma_1(e,n)$ и $\Gamma_2(f,n)$, то есть

$$s = n > 2 \, . \tag{6}$$

В противном случае рассматриваемая ГЧС будет прямой суммой ГЧС меньших размерностей. Этот случай был рассмотрен в статье [1].

Итак, пусть μ и k — вещественные корни кратности n гиперкомплексных систем $\Gamma_1(e,n)$ и $\Gamma_2(f,n)$ соответственно. Тогда нормальные формы экспонент от гиперкомплексных чисел $M=\sum_{i=1}^{n} m_i e_i \in \Gamma_1(e,n)$ и $K=\sum_{i=1}^{n} k_i f_i \in \Gamma_2(f,n)$ соответственно такие:

$$Exp(M)=e^{\mu}\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=0}^{n-1} P_{ij}(m_1,...,m_n))\cdot e_i, \tag{7}$$

$$Exp(K)=e^{\kappa}\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=0}^{n-1} Q_{ij}(k_1,...,k_n))\cdot f_i, \tag{8}$$

где P_{ij} и Q_{ij} — полиномы n-й степени от стоящих в скобках переменных.

Тогда задача исследования изоморфизма гиперкомплексных систем $\Gamma_1(e,n)$ и $\Gamma_2(f,n)$ сводится к поиску такого оператора изоморфизма вида (3) с выполнением условий (5), применение которого к (7) приводит к (8):

$$Exp(M)=e^{\mu}\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=0}^{n-1} P_{ij}(m_1,...,m_n))\cdot e_i \overset{L}{\Leftrightarrow} e^{\kappa}\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=0}^{n-1} Q_{ij}(k_1,...,k_n))\cdot f_i = Exp(K). \tag{9}$$

При этом если делать подстановки только в одну нормальную форму, например, в (7), то понадобится и матрица обратного преобразования — $\left|L^{-1}\right|$ в символьном виде, что делает выражения весьма громоздкими. С другой стороны, так как

$$M=\sum_{i=1}^{n} m_i e_i \overset{L}{\Leftrightarrow} \sum_{i=1}^{n} m_i \sum_{j=1}^{n} l_{ij} f_j = \sum_{j=1}^{n} f_j (\sum_{i=1}^{n} m_i l_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} k_j f_j = K \in \Gamma_2(f,n), \tag{10}$$

то компоненты числа $K \in \Gamma_2(f,n)$ определяются формулами:

$$k_j=\sum_{i=1}^{n} m_i l_{ij}, \tag{11}$$

имеющими простую структуру, что обуславливает целесообразность их подстановки в (9). Таким образом, в представление экспоненты в одной ГЧС целесообразно подставлять выражения (3) базисных элементов с помощью оператора изоморфизма, а во второе представление — выражения для преобразования компонентов числа (11).

При составлении системы уравнений, являющихся следствием (9), можно считать

$$e^{\mu}=e^{\kappa} \tag{12}$$

и сократить на них в обеих частях. Это возможно потому, что, если существует преобразование (3) с учетом (5), то оно переводит μ в *k*. Если же оно не существует, то рассматриваемые ГЧС неизоморфны.

Таким образом, с учетом вышесказанного из (9) имеем гиперкомплексное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=0}^{n-1}P_{ij}(m_1,...,m_n))\cdot\sum_{j=1}^{n}l_{ij}f_j=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=0}^{n-1}Q_{ij}(\sum_{s=1}^{n}m_s l_{s1},...,\sum_{s=1}^{n}m_s l_{sn}))\cdot f_i, \qquad (13)$$

из которого приравниванием выражений при одноименных базисных элементах f_i, $i=1,...,n$, получаем n уравнений, решаемых методом неопределенных коэффициентов, благодаря чему формируется система уравнений относительно элементов матрицы преобразования (3). Если она имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию (5), то рассматриваемые ГЧС изоморфны, а решения и представляют собой элементы оператора изоморфизма L. В противном случае эти ГЧС неизоморфны.

Рассмотрим случай, когда все корни комплексно-сопряженные кратные. Это может быть только в том случае, когда размерность ГЧС четная.

Тогда нормальная форма экспоненты будет иметь такой вид:

$$Exp(M)=e^{\mu}\sum_{j=1}^{n}P(m_1,...,m_n)e_j+e^{\bar{\mu}}\sum_{j=1}^{n}\bar{P}(m_1,...,m_n)e_j, \qquad (14)$$

где коэффициенты у членов полиномов P и $\bar{P}$ будут попарно комплексно-сопряженными по классической мнимой единице i. Дальнейшее исследование изоморфизма таких систем полностью аналогично случаю с кратными вещественными системами.

Рассмотрим несколько примеров разной степени сложности.

Примеры применения алгоритма с использованием представления экспонент

Пример 1. Рассмотрим две ГЧС размерности 3, относительно которых заранее известно, что они изоморфны, и покажем, что с помощью описанного выше метода можно не только определить факт их изоморфности, но и установить явный вид оператора изоморфизма.

Пусть исходной будет ГЧС $\Gamma_{32}(e,3)$ (по классификации [2]) с таблицей умножения вида

Γ_{32}	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	e_3	0
e_3	e_3	0	0

. (15)

С помощью линейного преобразования L

$$L:\begin{cases} e_1 = f_1, \\ e_2 = f_2 + f_3, \\ e_3 = f_2, \end{cases} \text{ и } L^{-1}:\begin{cases} f_1 = e_1, \\ f_2 = e_3, \\ f_3 = e_2 - e_3, \end{cases} \qquad (16)$$

перейдем от базиса e к базису f и получим новую ГЧС, которую обозначим $\Gamma_{32}^*(f,3)$. Ее таблица умножения строится с помощью линейного преобразования (16):

Γ_{32}^*	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_2	f_3
f_2	e_2	0	0
f_3	e_3	0	f_2

. (17)

Так как базисы $\Gamma_{32}(e,3)$ и $\Gamma_{32}^*(f,3)$ связаны линейным невырожденным преобразованием L и $|L| \neq 0$, то они изоморфны.

Посмотрим, как устанавливается их изоморфизм с помощью описанного выше метода. Как следует из [2], если

$$M = m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 \in \Gamma_{32}(e,3), \qquad (18)$$

то ассоциированная система линейных дифференциальных уравнений этой ГЧС имеет трехкратный корень характеристического уравнения:

$$\lambda = m_1, \qquad (19)$$

а представление экспоненты такое:

$$Exp(M) = e^{m_1}[e_1 + m_2e_2 + (m_3 + \frac{m_2^2}{2})e_3]. \qquad (20)$$

Аналогично и для ГЧС $\Gamma_{32}^*(f,3)$: если

$$N = n_1f_1 + n_2f_2 + n_3f_3 \in \Gamma_{32}^*(f,3), \qquad (21)$$

то ассоциированная система линейных дифференциальных уравнений этой ГЧС имеет трехкратный корень характеристического уравнения:

$$\lambda = n_1, \qquad (22)$$

а представление экспоненты следующее:

$$Exp(N) = e^{n_1}[f_1 + (n_2 + \frac{n_3^2}{2})f_2 + n_3f_3]. \qquad (23)$$

Если можно найти такое невырожденное линейное преобразование, которое связывает базисы систем $\Gamma_{32}(e,3)$ и $\Gamma^*_{32}(f,3)$ так, что экспоненты (20) и (23) переходят друг в друга, то $\Gamma_{32}(e,3)$ и $\Gamma^*_{32}(f,3)$ изоморфны. В противном случае — неизоморфны.

Так как единичные элементы ε и ε^* систем $\Gamma_{32}(e,3)$ и $\Gamma^*_{32}(f,3)$ соответственно являются элементами базисов: $\varepsilon = e_1$ и $\varepsilon^* = f_1$, а при изоморфном соответствии единичные элементы переходят друг в друга, то без ограничения общности оператор изоморфизма можно считать таким:

$$L:\begin{cases} e_1 = f_1, \\ e_2 = x_{21}f_1 + x_{22}f_2 + x_{23}f_3, \\ e_3 = x_{31}f_1 + x_{32}f_2 + x_{33}f_3. \end{cases} \qquad (24)$$

Посмотрим, как преобразуются числа при преобразовании базиса (24):

$$\begin{gathered} M = m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 \Leftrightarrow m_1f_1 + m_2(x_{21}f_1 + x_{22}f_2 + x_{23}f_3) + \\ + m_3(x_{31}f_1 + x_{32}f_2 + x_{33}f_3) = (m_1 + m_2x_{21} + m_3x_{31})f_1 + \\ + (m_2x_{22} + m_3x_{32})f_2 + (m_2x_{23} + m_3x_{33})f_3 = n_1f_1 + n_2f_2 + n_3f_3 = N, \end{gathered} \qquad (25)$$

откуда:

$$\begin{aligned} n_1 &= m_1 + m_2x_{21} + m_3x_{31}, \\ n_2 &= m_2x_{22} + m_3x_{32}, \\ n_3 &= m_2x_{23} + m_3x_{33}. \end{aligned} \qquad (26)$$

Таким образом, задача заключается в определении такого невырожденного оператора L (24), который бы переводил (20) в (23) и обратно:

$$Exp(M) \overset{L}{\Leftrightarrow} Exp(N). \qquad (27)$$

Если учесть соображения об экспоненциальном множителе (12), то соответствие (27) преобразуется в гиперкомплексное уравнение:

$$e_1 + m_2e_2 + (m_3 + \frac{m_2^2}{2})e_3 = f_1 + (n_2 + \frac{n_3^2}{2})f_2 + n_3f_3. \qquad (28)$$

Подставляем в левую часть (24), а в правую — (26):

$$\begin{gathered} f_1 + m_2(x_{21}f_1 + x_{22}f_2 + x_{23}f_3) + (m_3 + \frac{m_2^2}{2})(x_{31}f_1 + x_{32}f_2 + x_{33}f_3) = \\ = f_1 + ((m_2x_{22} + m_3x_{32}) + \frac{(m_2x_{23} + m_3x_{33})^2}{2})f_2 + (m_2x_{23} + m_3x_{33})f_3. \end{gathered} \qquad (29)$$

На основании определения равенства гиперкомплексных чисел гиперкомплексное уравнение (29) превращается в систему уравнений с вещественными переменными:

$$\begin{cases} m_2 x_{21} + \frac{1}{2} x_{31}(2m_3 + m_2^2) = 0, \\ m_2 x_{22} + \frac{1}{2} x_{32}(2m_3 + m_2^2) = \frac{1}{2}(2(m_2 x_{22} + m_3 x_{32}) + (m_2 x_{23} + m_3 x_{33})^2), \\ m_2 x_{23} + \frac{1}{2} x_{33}(2m_3 + m_2^2) = m_2 x_{23} + m_3 x_{33}. \end{cases} \tag{30}$$

Так как (30) должно выполняться для любых $m_2, m_3 \in R$, то метод неопределенных коэффициентов дает следующую очень простую по структуре систему из 10 уравнений:

$$\begin{cases} x_{21} = 0, & x_{33}^2 = 0, \\ x_{31} = 0, & x_{23} x_{33} = 0, \\ x_{22} = x_{22}, & x_{23} = x_{23}, \\ x_{32} = x_{23}^2, & x_{33} = x_{33}, \\ x_{32} = x_{32}, & x_{33} = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Такое подробное выписывание таких простых по структуре уравнений выполнено для того, чтобы показать преимущества предлагаемого метода. В дальнейшем этот этап будет пропускаться.

Значит решение системы (30) будет иметь вид:

$$x_{21} = 0;\ x_{22} = \alpha \in R;\ x_{23} = \beta \in R;\ x_{31} = 0;\ x_{32} = \beta^2 \in R^+;\ x_{33} = 0, \tag{32}$$

а оператор изоморфизма L:

$$L: \begin{cases} e_1 = f_1, \\ e_2 = \alpha f_2 + \beta f_3, \\ e_3 = \beta^2 f_2, \end{cases} \text{ и } L^{-1}: \begin{cases} f_1 = e_1, \\ f_2 = \frac{1}{\beta^2} e_3, \\ f_3 = \frac{1}{\beta}(e_2 - \frac{\alpha}{\beta^2} e_3). \end{cases} \tag{33}$$

Требование обратимости оператора предполагает: $\beta \in R \setminus 0$.

Из (26) и (33) следует правильность (12), то есть правильность сокращения на экспоненциальный множитель в уравнении (27).

Оператор вида (33) отличается от (16). Это объясняется следующим. Во-первых, нет требования единственности оператора. А, во-вторых, оператор вида

(33) имеет более общий вид по сравнению с (16), то есть (16) — частный случай (33): при $\alpha = 1, \beta = 1$ оператор (33) переходит в (16).

Проверим еще тот факт, что оператор (33) переводит таблицу (17) в таблицу (15):

$$
\begin{aligned}
&e_1 e_1 = f_1 f_1 = f_1 = e_1, \\
&e_1 e_2 = f_1(\alpha f_2 + \beta f_3) = \alpha f_2 + \beta f_3 = e_2, \\
&e_1 e_3 = f_1 \beta^2 f_2 = \beta^2 f_2 = e_3, \\
&e_2 e_2 = \alpha^2 f_2 f_2 + 2\alpha\beta f_2 f_3 + \beta^2 f_3 f_3 = \beta^2 f_3 f_3 = \beta^2 f_2 = e_3, \\
&e_2 e_3 = (\alpha f_2 + \beta f_3)\beta^2 f_2 = \alpha\beta f_2 f_2 + \beta^3 f_2 f_3 = 0, \\
&e_3 e_3 = \beta^2 f_2 \beta^2 f_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Сделаем промежуточные выводы. Системы $\Gamma_{32}(e,3)$ и $\Gamma^*_{32}(f,3)$ изоморфны, метод позволяет определить оператор изоморфизма наиболее общего вида, который точно воспроизводит таблицу умножения.

Пример 2. Рассмотрим две ГЧС размерности 3, относительно которых заранее известно, что они неизоморфны. Пусть одной из них будет ГЧС $\Gamma_{31}(e,3)$ (по классификации [2]) с таблицей умножения вида

Γ_{31}	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	0	0
e_3	e_3	0	0

, (34)

а вторая — уже рассмотренная выше система $\Gamma_{32}(f,3)$. Поскольку у нее имя базиса изменилось, приведем ее таблицу умножения:

Γ_{32}	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_2	f_3
f_2	f_2	f_3	0
f_3	f_3	0	0

. (35)

Как видно из (34) и (35), их единичные элементы соответственно: $\varepsilon_{31} = e_1$; $\varepsilon_{32} = f_1$.

Пусть

$$N = \sum_{i=1}^{3} n_i e_i \in \Gamma_{31}(e,3) \quad \text{и} \quad M = \sum_{i=1}^{3} m_i f_i \in \Gamma_{32}(f,3).$$

Легко показать, что числа при преобразовании базиса (24) преобразуются так:

$$\begin{aligned} m_1 &= n_1 + n_2 x_{21} + n_3 x_{31}, \\ m_2 &= n_2 x_{22} + n_3 x_{32}, \\ m_3 &= n_2 x_{23} + n_3 x_{33}. \end{aligned} \tag{36}$$

Представления экспонент в системах $\Gamma_{31}(e,3)$ и $\Gamma_{32}(f,3)$ соответственно следующие [2]:

$$Exp(N) = e^{n_1}(e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3)\,, \tag{37}$$

$$Exp(M) = e^{m_1}[f_1 + (m_2 + \frac{m_3^2}{2})f_2 + m_3 f_3]. \tag{38}$$

Ассоциированные системы линейных дифференциальных уравнений этих ГЧС имеют трехкратные корни характеристических уравнений: $\nu = n_1$, $\mu = m_1$.

Для решения вопроса об изоморфности ГЧС $\Gamma_{31}(e,3)$ и $\Gamma_{32}(f,3)$ необходимо определить, существует ли невырожденное линейное преобразование (24), которое переводит $\Gamma_{31}(e,3)$ в $\Gamma_{32}(f,3)$:

$$Exp(N) \overset{L}{\Leftrightarrow} Exp(M)\,. \tag{40}$$

Аналогично предыдущему случаю получаем гиперкомплексное уравнение

$$\begin{aligned} &f_1 + n_2(x_{21}f_1 + x_{22}f_2 + x_{23}f_3) + n_3(x_{31}f_1 + x_{32}f_2 + x_{33}f_3) = \\ &= f_1 + (n_2x_{22} + n_3x_{32})f_2 + (n_2x_{23} + n_3x_{33} + (n_2x_{22} + n_3x_{32})^2)f_3. \end{aligned} \tag{41}$$

Легко убедиться, что эта система имеет только тривиальное решение:

$$x_{21} = x_{22} = x_{23} = x_{31} = x_{32} = x_{33} = 0\,,$$

а это означает, что не существует невырожденного линейного оператора (24), и системы $\Gamma_{31}(e,3)$ и $\Gamma_{32}(f,3)$ неизоморфны.

Следует отметить, что даже при тривиальном решении характеристические числа обоих систем равны: $n_1 = m_1$, а это свидетельствует о правильности поиска оператора (24).

Рассмотрим гиперкомплексные числовые системы четвертой размерности $\dim\Gamma = 4$.

Пример 3. Исследуем на изоморфизм две ГЧС размерности 4, относительно которых заранее известно, что они неизоморфны. Пусть одной из них будет ГЧС $\Gamma_{44}(e,4)$ (по классификации [2]) с таблицей умножения вида

$$\begin{array}{c|cccc} \Gamma_{44} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_2 & e_4 & 0 & 0 \\ e_3 & e_3 & 0 & e_4 & 0 \\ e_4 & e_4 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad (42)$$

а вторая — система $\Gamma_{45}(f,4)$. Поскольку у нее имя базиса изменилось, приведем ее таблицу умножения:

$$\begin{array}{c|cccc} \Gamma_{45} & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ \hline f_1 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_2 & f_2 & f_4 & 0 & 0 \\ f_3 & f_3 & 0 & -f_4 & 0 \\ f_4 & f_4 & 0 & 0 & 0 \end{array}. \qquad (43)$$

Как видно из (42) и (43), их единичные элементы соответственно: $\varepsilon_{44} = e_1$, $\varepsilon_{45} = f_1$.

Пусть

$$N = \sum_{i=1}^{4} n_i e_i \in \Gamma_{44}(e,4) \ \text{ и } \ M = \sum_{i=1}^{4} m_i f_i \in \Gamma_{45}(f,4).$$

Легко показать, что числа при преобразовании базиса L

$$L: \begin{cases} e_1 = f_1, \\ e_2 = x_{21} f_1 + x_{22} f_2 + x_{23} f_3 + x_{24} f_4, \\ e_3 = x_{31} f_1 + x_{32} f_2 + x_{33} f_3 + x_{34} f_4, \\ e_4 = x_{41} f_1 + x_{42} f_2 + x_{43} f_3 + x_{44} f_4, \end{cases} \qquad (44)$$

преобразуются так:

$$\begin{aligned} m_1 &= n_1 + n_2 x_{21} + n_3 x_{31} + n_4 x_{41}, \\ m_2 &= n_2 x_{22} + n_3 x_{32} + n_4 x_{42}, \\ m_3 &= n_2 x_{23} + n_3 x_{33} + n_4 x_{43}, \\ m_4 &= n_2 x_{24} + n_3 x_{34} + n_4 x_{44}. \end{aligned} \qquad (45)$$

Представления экспонент в системах $\Gamma_{44}(e,4)$ и $\Gamma_{45}(f,4)$ соответственно следующие [2]:

$$Exp(N) = e^{n_1}(e_1 + n_2e_2 + n_3e_3 + (n_4 + \frac{1}{2}(n_2^2 + n_3^2))), \tag{46}$$

$$Exp(M) = e^{m_1}(e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 + (m_4 + \frac{1}{2}(m_2^2 - m_3^2))). \tag{47}$$

Ассоциированные системы линейных дифференциальных уравнений этих ГЧС имеют четырехкратные корни характеристических уравнений: $\nu = n_1$, $\mu = m_1$.

Для решения вопроса об изоморфности ГЧС $\Gamma_{44}(e,4)$ и $\Gamma_{45}(f,4)$ необходимо определить, существует ли невырожденное линейное преобразование (44), которое переводит $\Gamma_{44}(e,4)$ в $\Gamma_{45}(f,4)$ и обратно:

$$Exp(N) \overset{L}{\Leftrightarrow} Exp(M). \tag{48}$$

Искомое преобразование, если оно существует, должно переводить

$$e^{n_1} \Leftrightarrow e^{m_1}. \tag{49}$$

Тогда эти экспоненты можно опустить и приравнивать содержимое скобок, подставляя (44) в левую часть, а (45) — в правую:

$$\begin{gathered} f_1 + n_2(x_{21}f_1 + x_{22}f_2 + x_{23}f_3 + x_{24}f_4) + n_3(x_{31}f_1 + x_{32}f_2 + x_{33}f_3 + x_{34}f_4) + \\ +(n_4 + \frac{1}{2}(n_2^2 + n_3^2))(x_{41}f_1 + x_{42}f_2 + x_{43}f_3 + x_{44}f_4) \overset{L}{\Leftrightarrow} \\ \overset{L}{\Leftrightarrow} f_1 + (n_2x_{22} + n_3x_{32} + n_4x_{42})f_2 + (n_2x_{23} + n_3x_{33} + n_4x_{43}f_3 + ((n_2x_{24} + n_3x_{34} + n_4x_{44} + \\ + \frac{1}{2}((n_2x_{22} + n_3x_{32} + n_4x_{42})^2 - (n_2x_{23} + n_3x_{33} + n_4x_{43})^2)f_4. \end{gathered} \tag{50}$$

Решая (50) методом неопределенных коэффициентов, получаем следующее решение:

$$x_{21}, x_{31}, x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44} = 0, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, \in R, \tag{51}$$

а это означает, что линейный оператор (44) вырожденный, и системы $\Gamma_{44}(e,4)$ и $\Gamma_{45}(f,4)$ неизоморфны.

Следует отметить, что даже при решении (51) характеристические числа равны:

$$n_1 = m_1,$$

а это свидетельствует о правильном методе поиска оператора (44).

Пример 4. Рассмотрим две ГЧС размерности 4, относительно которых заранее известно, что они изоморфны, и покажем, что с помощью описанного выше метода можно не только определить факт их изоморфности, но и установить явный вид оператора изоморфизма.

Пусть исходной будет ГЧС $\Gamma_{43}(e,4)$ (по классификации [2]) с таблицей умножения вида

$$\begin{array}{c|cccc} \Gamma_{43} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_2 & e_4 & 0 & 0 \\ e_3 & e_3 & 0 & 0 & 0 \\ e_4 & e_4 & 0 & 0 & 0 \end{array}. \tag{52}$$

С помощью линейного преобразования L

$$L:\begin{cases} e_1 = f_1, \\ e_2 = f_2 + f_3, \\ e_3 = f_4, \\ e_4 = f_3, \end{cases} \text{ и } L^{-1}:\begin{cases} f_1 = e_1, \\ f_2 = e_2 - e_4, \\ f_3 = e_4, \\ f_4 = e_3, \end{cases} \tag{53}$$

перейдем от базиса e к базису f и получим новую ГЧС, которую обозначим $\Gamma_{43}^*(f,4)$. Ее таблица умножения строится с помощью линейного преобразования (53):

$$\begin{array}{c|cccc} \Gamma_{43}^* & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ \hline f_1 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_2 & f_2 & f_3 & 0 & 0 \\ f_3 & f_3 & 0 & 0 & 0 \\ f_4 & f_4 & 0 & 0 & 0 \end{array}. \tag{54}$$

Так как базисы $\Gamma_{43}(e,4)$ и $\Gamma_{43}^*(f,4)$ связаны линейным невырожденным преобразованием L и $|L| \neq 0$, то эти системы изоморфны.

Посмотрим, как устанавливается их изоморфизм с помощью описанного выше метода. Как следует из [2], если

$$M = m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4 \in \Gamma_{43}(e,4), \tag{55}$$

то ассоциированная система линейных дифференциальных уравнений этой ГЧС имеет четырехкратный корень характеристического уравнения

$$\lambda = m_1, \tag{56}$$

а представление экспоненты такое:

$$Exp(M) = e^{m_1}[e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 + (m_4 + \frac{m_2^2}{2})e_4]. \qquad (57)$$

Аналогично и для ГЧС $\Gamma_{43}^*(f,4)$: если

$$N = n_1f_1 + n_2f_2 + n_3f_3 + n_4f_4 \in \Gamma_{43}^*(f,4), \qquad (58)$$

то ассоциированная система линейных дифференциальных уравнений этой ГЧС имеет четырехкратный корень характеристического уравнения

$$\lambda = n_1, \qquad (59)$$

а представление экспоненты следующее:

$$Exp(N) = e^{n_1}[f_1 + n_2f_2 + (n_3 + \frac{n_2^2}{2})f_3 + n_4f_4]. \qquad (60)$$

Если можно найти такое невырожденное линейное преобразование, которое связывает базисы систем $\Gamma_{43}(e,4)$ и $\Gamma_{43}^*(f,4)$ так, что экспоненты (57) и (60) переходят друг в друга, то $\Gamma_{43}(e,4)$ и $\Gamma_{43}^*(f,4)$ изоморфны. В противном случае — неизоморфны.

Так как единичные элементы ε и ε^* систем $\Gamma_{43}(e,4)$ и $\Gamma_{43}^*(f,4)$ соответственно являются элементами базисов $\varepsilon_{43} = e_1$ и $\varepsilon_{43}^* = f_1$, а при изоморфном соответствии единичные элементы переходят друг в друга, то без ограничения общности оператор изоморфизма имеет вид (44).

При преобразовании базиса (44) компоненты числа преобразуются так:

$$\begin{aligned}
n_1 &= m_1 + m_2x_{21} + m_3x_{31} + m_4x_{41},\\
n_2 &= m_2x_{22} + m_3x_{32} + m_4x_{42},\\
n_3 &= m_2x_{23} + m_3x_{33} + m_4x_{43},\\
n_4 &= m_2x_{24} + m_3x_{34} + m_4x_{44}.
\end{aligned} \qquad (61)$$

Таким образом, задача заключается в определении такого невырожденного оператора L (44), который бы переводил (57) в (60) и обратно:

$$Exp(M) \overset{L}{\Leftrightarrow} Exp(N). \qquad (62)$$

Если учесть соображения об экспоненциальном множителе (12), то соответствие (62) преобразуется в гиперкомплексное уравнение:

$$e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 + (m_4 + \frac{m_2^2}{2})e_4 = f_1 + n_2f_2 + (n_3 + \frac{n_2^2}{2})f_3 + n_4f_4. \qquad (63)$$

Подставляем в левую часть (44), а в правую — (61):

$$
\begin{gathered}
f_1 + m_2(x_{21}f_1 + x_{22}f_2 + x_{23}f_3 + x_{24}f_4) + m_3(x_{31}f_1 + x_{32}f_2 + x_{33}f_3 + x_{34}f_4) + \\
+(m_4 + \frac{m_2^2}{2})(x_{41}f_1 + x_{42}f_2 + x_{43}f_3 + x_{44}f_4) \quad = f_1 + (m_2x_{22} + m_3x_{32} + m_4x_{42})f_2 + \\
+(m_2x_{23} + m_3x_{33} + m_4x_{43} + \frac{(m_2x_{22} + m_3x_{32} + m_4x_{42})^2}{2})f_3 + (m_2x_{24} + m_3x_{34} + m_4x_{44})f_4.
\end{gathered} \tag{64}
$$

На основании определения равенства гиперкомплексных чисел гиперкомплексное уравнение (29) превращается в систему уравнений с вещественными переменными:

$$
\begin{cases}
m_2x_{21} + m_3x_{31} + \frac{1}{2}x_{41}(2m_4 + m_2^2) = 0, \\
m_2x_{22} + m_3x_{32} + \frac{1}{2}x_{42}(2m_4 + m_2^2) = m_2x_{22} + m_3x_{32} + m_4x_{42}, \\
m_2x_{23} + m_3x_{33} + \frac{1}{2}x_{43}(2m_4 + m_2^2) = m_2x_{23} + m_3x_{33} + m_4x_{43} + \frac{1}{2}(m_2x_{22} + m_3x_{32} + m_4x_{42})^2, \\
m_2x_{23} + m_3x_{33} + m_4x_{44} + \frac{1}{2}m_2^2x_{44} = m_2x_{24} + m_3x_{34} + m_4x_{44}.
\end{cases} \tag{65}
$$

Так как (65) должно выполняться для любых $m_2, m_3, m_4 \in R$, то метод неопределенных коэффициентов дает следующее решение:

$$
\begin{cases}
x_{21} = 0, & x_{23} \in R, \\
x_{31} = 0, & x_{33} = 0, \\
x_{41} = 0, \;\; = & x_{43} \quad x_{22}^2 \in R^+, \\
x_{22} \in R, & x_{24} \in R, \\
x_{32} = 0, & x_{34} \in R, \\
x_{42} = 0, & x_{44} = 0,
\end{cases} \tag{66}
$$

а оператор изоморфизма L

$$
L: \begin{cases}
e_1 = f_1, \\
e_2 = x_{22}f_2 + x_{23}f_3 + x_{24}f_4, \\
e_3 = x_{34}f_4, \\
e_4 = x_{22}^2 f_3,
\end{cases}
\quad \text{и} \quad
L^{-1}: \begin{cases}
f_1 = e_1, \\
f_2 = e_2 - \frac{x_{24}}{x_{22}x_{34}}e_3 - \frac{x_{23}}{x_{22}^3}e_4, \\
f_3 = \frac{1}{x_{22}^2}e_4, \\
f_4 = \frac{1}{x_{34}}e_2.
\end{cases} \tag{67}
$$

Из обратимости оператора L в дополнение к (67) следует: $x_{22}, x_{34} \in R \setminus 0$.

Из (61) и (67) следует правильность (12), то есть правильность сокращения на экспоненциальный множитель в (62). Оператор вида (67) отличается от (53). Объяснение этому точно такое же, как и в примере 1. Можно убедиться непосредственно в том, что оператор (67) переводит таблицу (54) в таблицу (52).

Из всего вышеизложенного можно сделать вывод: системы $\Gamma_{43}(e,4)$ и $\Gamma^*_{43}(f,4)$ изоморфны. При этом определен оператор изоморфизма наиболее общего вида, который точно воспроизводит таблицу умножения.

Выводы

Предложенный метод использования представлений экспонент позволяет решать вопрос об изоморфизме ГЧС и для случая наличия у них корней характеристических уравнений кратности, большей 2. При этом вместо решения системы квадратичных уравнений большой размерности вида (4) задача сводится к решению системы более простых уравнений. И хотя их число может быть даже больше, чем у системы квадратичных уравнений, их простота значительно облегчает процесс решения задачи. Полученные примеры показывают, что метод может быть применен и для решения вопроса об изоморфизме ГЧС более высоких размерностей. Кроме того, структура метода такова, что он легко формализуется, и может быть разработано алгоритмически-программное обеспечение для его реализации. Так как при работе этого обеспечения требуется выполнять разнообразные символьные процедуры и операции, то для среды программирования целесообразно применить систему символьных вычислений Maple с использованием инструментария для выполнения операций с гиперкомплексными числами [2].

1. *Калиновский Я.О.* Изоморфизм коммутативных гиперкомплексных числовых систем и представления экспоненциальных функций в них / Я.А. Калиновский, Т.В. Синькова, М.О. Муратова // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2012. — Т. 14, № 1. — С. 10–24.

2. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Ю.Е. Бояринова, Я.А. Калиновский. — К.: Инфодрук, 2010. — 388 с.

3. *Dieterich E.* Classification, Automorphism Groups and Categorical Structure of the Two-Dimensional Real Division Algebras / E. Dieterich // Journal of Algebra and Its Applications. — 2005. — **4**. — P. 517–538.

4. *E. Darpö E.* Classification of the Four-Dimensional Power-Commutative Real Division Algebras / E. Darpö E., A. Rochdi // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics. — December, 2011. — Vol. 141. — Is. 06. — P. 1207–1223.

Поступила в редакцию 27.08.2012