

УДК 004.925

**О. Н. Романюк<sup>1</sup>, М. Д. Обідник<sup>1</sup>, О. М. Мельников<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Вінницький національний технічний університет  
вул. Хмельницьке шосе, 95, 21021 Вінниця, Україна

<sup>2</sup>Вінницький кооперативний інститут  
вул. Фрунзе, 59, 21009 Вінниця, Україна

## **Спрощення процедури визначення векторів із використанням сферично-кутової інтерполяції**

*Запропоновано модифікацію методу сферично-кутової інтерполяції векторів для задачі тонування. Спрощення розрахунків щодо базового методу досягається тим, що кут між нормальними векторами в сусідніх пікселях у рядках растеризації розраховується один раз для всього полігона. Оцінено похибку обчислень, яка виникає при застосуванні запропонованої модифікації.*

**Ключові слова:** нормаль, сферично-кутова інтерполяція, полігон, растеризація.

### **Вступ**

Графічна форма подання інформації є найбільш інформативною, тому реалістичні зображення використовуються майже в усіх інженерних і наукових задачах для візуального відтворення реальних об'єктів. Формування реалістичних зображень характеризується значними обчислювальними затратами, що зумовлює підвищенні вимоги як до засобів, так і до методів формування графічних зображень. На сучасному етапі розвитку комп'ютерної графіки розробка нових високопродуктивних методів і засобів формування реалістичних зображень є пріоритетним напрямком, оскільки традиційні підходи не забезпечують необхідну продуктивність, особливо для формування динамічних зображень у реальному масштабі часу.

Серед методів зафарбування тривимірних об'єктів найбільшого поширення отримали методи Гуро і Фонга. В методі Гуро розраховуються значення інтенсивностей для полігональних вершин, які потім у процесі растеризації лінійно інтерполюються вздовж ребер і рядків сканування. У методі Фонга замість значень інтенсивності кольору інтерполюються вектори, які потім використовуються у функції тонування для обчислення інтенсивності кольору кожного піксела зображення. Стосовно методу Гуро, метод Фонга характеризується значно більшими обчислювальними затратами, однак при цьому досягається краща локальна апрок-

симація кривизни поверхні і, як наслідок, отримують більш реалістичні зображення.

Визначення векторів і їхня нормалізація в методі тонування Фонга є достатньо трудомісткою процедурою. Використання сферично-кутової інтерполяції для знаходження векторів дозволяє вилучити з обчислювального процесу нормалізацію, тому дослідження в цьому напрямку є актуальними.

## Аналіз останніх досліджень

Сферично-кутова інтерполяція [1] передбачає, що кут між проміжними векторами одинаковий на всьому проміжку інтерполяції.

М. Аббас розробив апаратну реалізацію затінення Фонга з використанням сферичної інтерполяції [2].

Андерс Хаст, Тоні Барера та Еверт Бенгтссон запропонували використовувати формулу Муавра для розрахунку проміжних векторів [3]. Використання такого підходу для розрахунку проміжних векторів вилучає з обчислювального процесу такі складні операції, як ділення та визначення квадратного кореня. Інтерполяція одиничних векторів між початковим  $\vec{N}_a$  і кінцевим  $\vec{N}_b$  розраховується за формулою:

$$\vec{N}(w) = \vec{N}_a \frac{\sin((1-w)\cdot\psi)}{\sin \psi} + \vec{N}_b \frac{\sin(w\cdot\psi)}{\sin \psi},$$

де  $w \in [0,1]$ , а  $\psi$  — кут між векторами  $\vec{N}_a$  та  $\vec{N}_b$ .

Розрахунок векторів передбачає визначення синуса, ресурсоємної функції арккосинуса для знаходження невідомих  $w$  і  $\psi$ , а також виконання операції ділення.

У роботах [4, 5] запропоновано підхід до перспективно-коректного визначення векторів нормалей з використанням сферично-кутової інтерполяції. Такий підхід дає змогу поліпшити якість зображення, що формується на екрані, проте вимагає трудомістких розрахунків тригонометричних функцій  $\sin$  та  $\cos$ .

Ученими з національного університету Хонбука (Південна Корея) було запропоновано на основі інтерполяції нормалей відновлювати форму поверхні тривимірного об'єкта [6].

У роботі [7] запропоновано інтерполяцію нормалей, яка виправляє візуальні артефакти, що можуть виникати при тонуванні Фонга; наприклад, відбите світло у тому місці, де його не має бути. Як наслідок, поверхні, що зафарбовуються, виглядають більш згладженими. Проте і цей підхід передбачає розрахунок тригонометричних функцій, а також нормалізацію векторів.

О.Н. Романюк і А.В. Чорний запропонували ітераційну формулу для послідовного обчислення кожного наступного вектора, використовуючи значення двох попередніх [8]:

$$\vec{N}(t+1) = 2\vec{N}(t) \cdot \cos \varphi - \vec{N}(t-1),$$

де  $\vec{N}(t)$  — поточний вектор у рядку растеризації (РР);  $\vec{N}(t+1)$  — наступний вектор у РР, а  $\vec{N}(t-1)$  — попередній вектор у РР;  $\varphi = \psi / m$ , де  $\psi = \arccos(\vec{N}_a \cdot \vec{N}_b)$ , а  $m$  — кількість точок у РР (рис. 1).

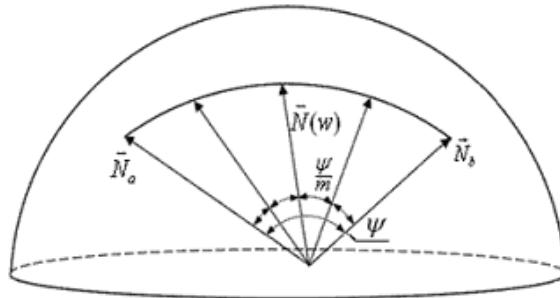


Рис. 1. Сферично-кутова інтерполяція векторів нормалей

Розрахунок  $\cos \varphi = \cos\left(\frac{\arccos(N_a \cdot N_b)}{m}\right)$  досить складний з обчислювальної точки зору, тому було запропоновано апроксимувати  $\cos \varphi$  такою функцією [8]:

$$\cos \varphi = \cos\left(\frac{\psi}{m}\right) \approx \frac{\cos \psi - 1}{m^2} + 1. \quad (1)$$

На рис. 2 зображено поверхню, яка відображає залежність абсолютної похибки апроксимації  $\Delta$  від кута  $\psi$  і від довжини рядка растеризації  $m$ .

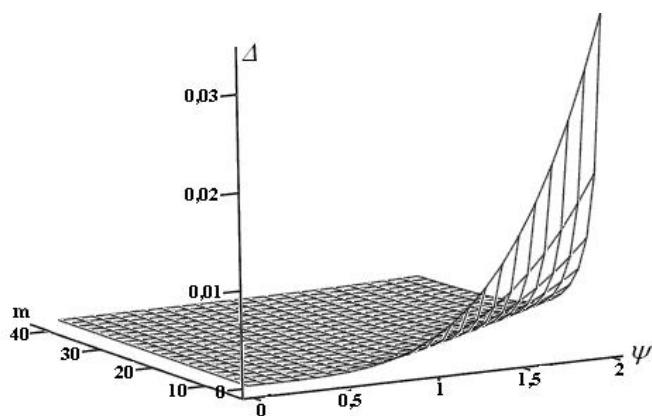


Рис. 2. Залежність абсолютної похибки апроксимації від  $\psi$  та  $m$

Із графіка видно, що для більшої частини поверхні  $\Delta \rightarrow 0$ . Виняток складає ділянка поверхні, для якої  $\psi > \pi / 2$ , де похибка хоча і зростає, але не веде до візуальних спотворень.

Слід відмітити, що растеризація всього полігона передбачає розрахунок  $\cos \varphi$  за формулою (1) для кожного рядка растеризації. Тому актуально знайти

умову, за якої приріст кута є сталим для всіх рядків растеризації, або перевірити з якою похибкою можна припустити таке твердження та в якому діапазоні вона змінюється.

**Метою дослідження** є спрощення процедури тонування високодеталізованих тривимірних поверхонь при використанні сферично-кутової інтерполяції нормалей.

## Розв'язання задачі

Генерація 3D-зображень є складною обчислювальною задачею, в зв'язку з чим виконують її декомпозицію [9]. У більшості графічних систем складові поверхні об'єктів апроксимують мережею трикутників, які після трансформацій зі світової системи растеризують в екранній системі координат. Найпоширеніше розбиття зображень на трикутники пояснюється такими причинами: трикутник є найпростішим полігоном, вершини якого однозначно задають площину; будь-яку поверхню можна гарантовано розбити на трикутники; обчислювальна складність алгоритмів розбиття поверхні на трикутники істотно менша порівняно з використанням інших полігонів; реалізація процедур рендерингу найпростіша для області, що обмежена трикутником; для трикутника легко визначити трьох його найближчих сусідів, що мають із ним спільні грані; видові перетворення трикутника суттєво простіші порівняно з криволінійними об'єктами; процедура текстурування трикутників найбільш проста. Полігональна модель підтримується стандартами Direct3D і OpenGL [9].

Після проектування на екран трикутник задається координатами трьох вершин і нормалями в них. Розглянемо довільний трикутник  $ABD$ , який зображене на рис. 3, а, де  $A$ ,  $B$  і  $D$  — вершини трикутника, а  $\vec{N}_A$ ,  $\vec{N}_B$  і  $\vec{N}_D$  — нормалі у відповідних вершинах.

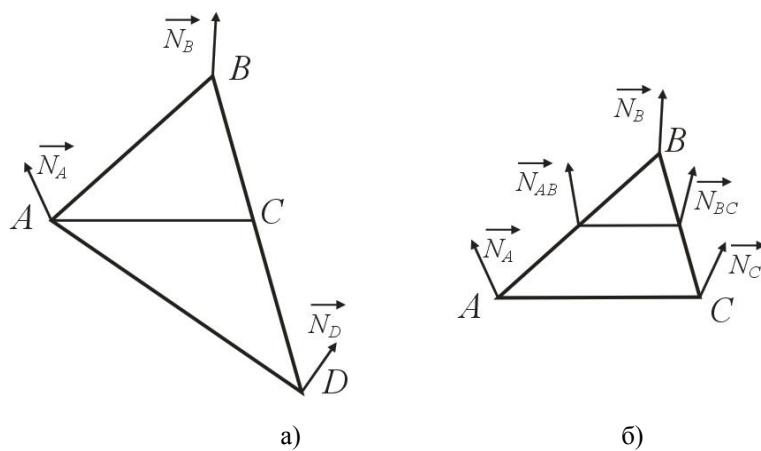


Рис. 3. Полігон, заданий вершинами та відповідними нормалями трикутника

Виділимо найдовший рядок ратеризації. Він проходить через точку  $A$  і перетинає ребро  $BD$  у точці  $C$ . При цьому нормаль  $\vec{N}_C$  визначає орієнтацію поверхні

у цій точці. Розглянемо утворений трикутник  $ABC$  (рис. 3, $\bar{b}$ ), який задано точками  $A$ ,  $B$  і  $C$  та відповідними нормалями  $\vec{N}_A$ ,  $\vec{N}_B$  і  $\vec{N}_C$ . Основа  $AC$  є найдовшим РР даного полігона. Вектори  $\vec{N}_{AB}$  і  $\vec{N}_{BC}$  — це нормальні у відповідних середніх точках ребер трикутника, що задають середину лінію. Оскільки довжина середньої лінії у два рази менша довжини відповідної основи трикутника, то рядок растеризації, що відповідає середній лінії довільного трикутника, містить приблизно в два рази меншу кількість пікселів, ніж РР, що задається його основою.

Зведемо вектори  $\vec{N}_A$ ,  $\vec{N}_B$ ,  $\vec{N}_C$ ,  $\vec{N}_{AB}$  і  $\vec{N}_{BC}$  у точку  $O$ , як показано на рис. 4, $a$ .  $\vec{N}_A$ ,  $\vec{N}_B$  і  $\vec{N}_C$  утворюють сферичний трикутник, а  $\vec{N}_{AB}$  і  $\vec{N}_{BC}$  ділять дуги  $\vec{N}_A\vec{N}_B$  і  $\vec{N}_B\vec{N}_C$  відповідно навпіл. Нехай  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$  — відповідно кути між векторами  $\vec{N}_A$  і  $\vec{N}_B$ ,  $\vec{N}_B$  і  $\vec{N}_C$ ,  $\vec{N}_A$  і  $\vec{N}_C$ .

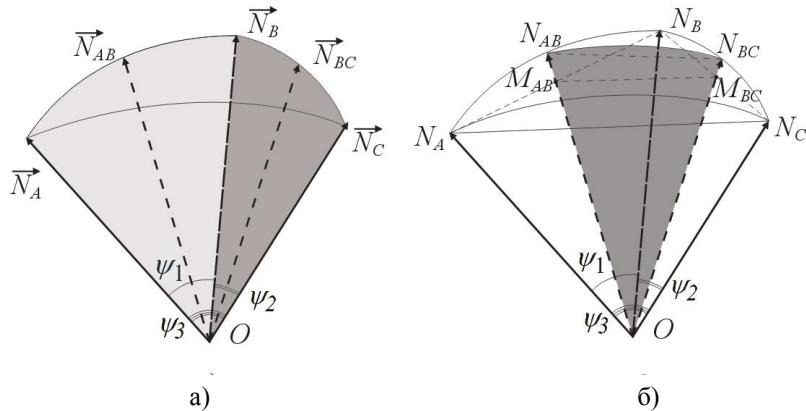


Рис. 4. Сферичний трикутник, утворений нормальними векторами

На рис. 4 відтінками сірого коліору виділено площини, які утворені відповідними векторами. На рис. 5, $a$  зображене розріз сферичного трикутника площею, утвореною векторами  $\vec{N}_A$  і  $\vec{N}_B$ , а на рис. 5, $b$  — площею, утвореною векторами  $\vec{N}_{AB}$  і  $\vec{N}_{BC}$ . На розрізах сферичного трикутника кінці векторів позначені відповідними точками. Довжини утворених відрізків  $ON_A$ ,  $ON_B$ ,  $ON_{AB}$  і  $ON_{BC}$  дорівнюють 1, оскільки відповідні їм вектори нормалізовані. З рис. 5, $a$  видно, що при зростанні кута  $\psi_1$  збільшується відрізок  $M_{AB}N_{AB}$  хорди  $N_AN_B$ . Аналогічно при зростанні  $\psi_2$  — збільшується довжина  $M_{BC}N_{BC}$ .

Знайдемо довжину відрізка  $OM_{AB}$

$$OM_{AB} = ON_B \cdot \cos(\psi_1 / 2) = 1 \cdot \cos(\psi_1 / 2) = \cos(\psi_1 / 2).$$

Аналогічно

$$OM_{BC} = \cos(\psi_2 / 2).$$

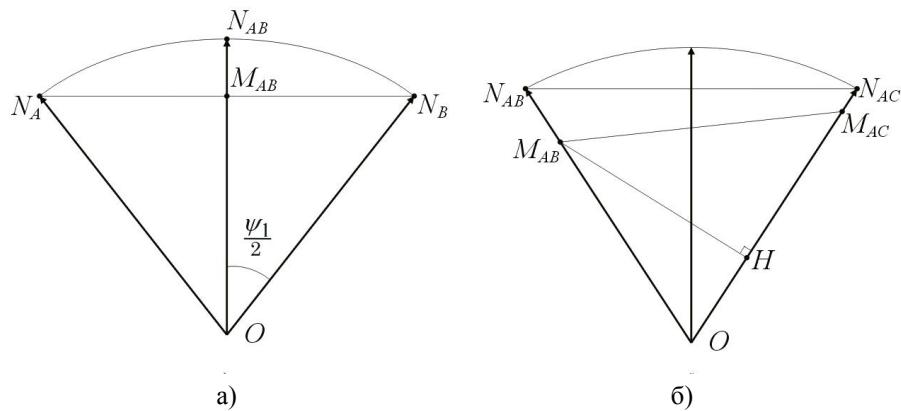


Рис. 5. Розрізи сферичного трикутника, утвореного нормалями

Розглянемо трикутник  $N_A N_B N_C$ , що зображеній на рис. 4,б. Оскільки вектори  $\vec{N}_{AB}$  і  $\vec{N}_{BC}$  ділять відповідні дуги  $\vec{N}_A \vec{N}_B$  і  $\vec{N}_B \vec{N}_C$  пополам, то і хорди  $N_A N_B$  та  $N_B N_C$  діляться ними пополам. Тому  $M_{AB} M_{BC}$  — середня лінія трикутника  $N_A N_B N_C$ . Можна записати тотожність:

$$M_{AB} M_{BC} = N_A N_C / 2.$$

Із рис. 4,б видно, що  $N_{AB} N_{BC} > M_{AB} M_{BC}$  (виняток становить тільки випадок, коли всі три вектори  $\vec{N}_A$ ,  $\vec{N}_B$ ,  $\vec{N}_C$  рівні між собою, а отже  $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3$ ). Тому у загальному випадку

$$N_{AB} N_{BC} > N_A N_C / 2.$$

Як відомо, величину кута у сферичному трикутнику можна задати довжиною дуги або хорди, на яку вона опирається. Тому, враховуючи останню нерівність, можна стверджувати, що кут, утворений векторами  $\vec{N}_{AB}$  і  $\vec{N}_{BC}$ , більший за  $\psi_3 / 2$ . Нехай кут, утворений векторами  $\vec{N}_{AB}$  та  $\vec{N}_{BC}$ , становить  $\psi_s$ .

Приріст кута в РР, що відповідає основі трикутника  $ABC$ , становить

$$\varphi_m = \frac{\Psi_3}{m} = \frac{\Psi_3 / 2}{m / 2}. \quad (2)$$

Аналогічно, приріст кута в РР, що відповідає середній лінії трикутника  $ABC$ , становить

$$\varphi_s = \frac{\Psi_s}{m / 2}. \quad (3)$$

Із рівнянь (2) і (3) та умови, що  $\psi_s > \psi_3 / 2$ , випливає, що  $\varphi_s > \varphi_m$ . Тобто, приrosti кутів у рядках растеризації мають різну величину.

Припустимо, що  $\varphi = \varphi_s = \varphi_m = \varphi_i$ , де  $\varphi_i$  — приrost кута в поточному РР. За таких умов має місце суттєве спрощення розрахунків інтерполяції нормалей, оскільки формула (1) розраховується один раз для всього полігону.

Оцінимо максимальну похибку кута, яка виникає при застосуванні запропонованого вище підходу. Її можна виразити такою рівністю:

$$\Delta = \psi_s - \frac{\psi_3}{2}.$$

Оскільки величину кута в сферичному трикутнику можна виразити через довжину хорди, на яку спирається дуга цього кута, то чим довша хорда, тим більший кут, на який вона спирається. На рис. 5,б зображене розріз сферичного трикутника по площині, утвореній векторами  $\vec{N}_{AB}$  і  $\vec{N}_{BC}$ . Кут  $\psi_s$  можна визначити через довжину хорди  $N_{AB}N_{BC}$ , а кут  $\psi_3 / 2$  — через довжину  $M_{AB}M_{BC}$ . Із цього ж рисунка видно, що довжина  $M_{AB}M_{BC}$  залежить від довжин відрізків  $M_{AB}N_{AB}$  і  $M_{BC}N_{BC}$ . При цьому, чим довший кожний з них, тим коротший  $M_{AB}M_{BC}$ . Довжини  $M_{AB}N_{AB}$  і  $M_{BC}N_{BC}$  залежать від величини  $\psi_1$  та  $\psi_2$  відповідно. Наприклад, чим більший кут  $\psi_1$ , тим довший відрізок  $M_{AB}N_{AB}$  і тим менша довжина  $M_{AB}M_{BC}$ , відповідно кут  $\psi_3 / 2$  також менший, а отже різниця  $\Delta$  більша. Така закономірність має місце і для кута  $\psi_2$ . З рис. 4,б видно, що при зменшенні  $\psi_3$  кут  $\psi_s$ , утворений векторами  $\vec{N}_{AB}$  і  $\vec{N}_{BC}$ , також зменшується, а відповідно зменшується і різниця  $\Delta$ . Враховуючи всі ці закономірності, для спрощення визначення максимальної абсолютної похибки кута  $\Delta$ , припустимо, що

$$\psi'_1 = \psi'_2 = \psi'_3 = \psi = \max(\psi_1, \psi_2, \psi_3), \quad (4)$$

де  $\psi'_1$ ,  $\psi'_2$  і  $\psi'_3$  — відповідні  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  і  $\psi_3$  кути, які використовуються для визначення максимальної абсолютної похибки кута  $\Delta$ . Як було зазначено вище, зменшення будь-якого з кутів  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  чи  $\psi_3$  призводить до зменшення похибки кута  $\Delta$ . Тому, застосовуючи припущення (4), максимальна похибка збільшується, що, в свою чергу, дозволяє її оцінити як для найгіршого випадку.

На рис. 6 зображене розріз сферичного трикутника площиною, утвореною векторами  $\vec{N}_{AB}$  і  $\vec{N}_{BC}$ . Оскільки кути  $\psi'_1$  та  $\psi'_2$  рівні, то відповідні хорди та їхні висоти у сферичному трикутнику також рівні. Тому  $N'_{AB}M'_{AB} = N'_{BC}M'_{BC}$ .

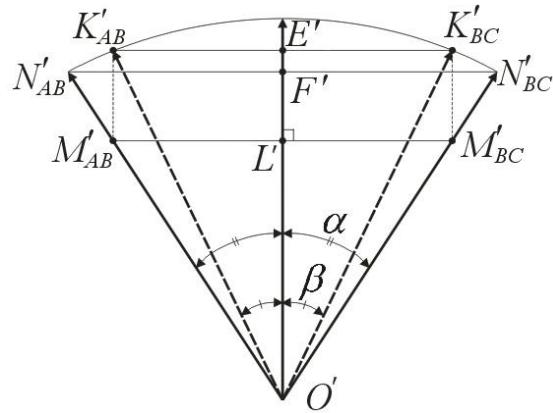


Рис. 6. Розріз сферичного трикутника площиною, утвореною векторами  $\vec{N}_{AB}$  і  $\vec{N}_{BC}$

Через точки  $M'_{AB}$  і  $M'_{BC}$  перпендикулярно до  $M'_{AB}M'_{BC}$  проведемо прямі, які перетнуться з одиничною сферою у точках  $K'_{AB}$  і  $K'_{BC}$  відповідно. В результаті цього утворено прямокутник  $M'_{AB}M'_{BC}K'_{BC}K'_{AB}$ , у якому  $M'_{AB}M'_{BC} = K'_{AB}K'_{BC}$ . Точки  $K'_{AB}$  і  $K'_{BC}$  задають кут  $2\beta = \psi / 2$  на одиничній сфері. Позначимо  $\angle N'_{AB}O N'_{BC}$  як  $2\alpha = \psi_s$ . Точки  $L'$ ,  $F'$  і  $E'$  ділять  $M'_{AB}M'_{BC}$ ,  $N'_{AB}N'_{BC}$  і  $K'_{AB}K'_{BC}$  відповідно пополам.

Максимальну абсолютну похибку кута  $\Delta$  можна визначити за формулою:

$$\Delta = 2\alpha - 2\beta . \quad (5)$$

Відповідно до рис. 5,*a*, враховуючи припущення (4), можна записати:

$$OM_{AB} = OM_{BC} = 1 \cdot \cos(\psi / 2) = \cos(\psi / 2) . \quad (6)$$

Із рис. 6 знайдемо, що

$$2\beta = \psi / 2 \Rightarrow \beta = \psi / 4 ,$$

$$EK_{BC} = OK_{BC} \cdot \sin \beta = 1 \cdot \sin(\psi / 4) = \sin(\psi / 4) . \quad (7)$$

Запишемо вираз

$$LM_{BC} = OM_{BC} \cdot \sin \alpha .$$

Отримані у рівняннях (6) і (7) значення підставимо у попередній вираз і врахуємо, що  $LM_{BC} = EK_{BC}$

$$\sin(\psi / 4) = \cos(\psi / 2) \cdot \sin \alpha .$$

З отриманої тотожності знайдемо кут  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{\sin(\psi/4)}{\cos(\psi/2)} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{\sin(\psi/4)}{\cos(\psi/2)}\right).$$

Перепишемо рівняння (5), враховуючи значення кута  $\alpha$ . Отримаємо:

$$\Delta = 2 \arcsin\left(\frac{\sin(\psi/4)}{\cos(\psi/2)}\right) - \frac{\psi}{2}.$$

Графік залежності максимальної абсолютної похибки кута  $\Delta$  від кута  $\psi$  зображенено на рис. 7.

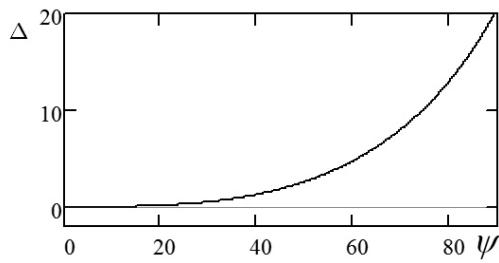


Рис. 7. Залежність максимальної абсолютної похибки кута  $\Delta$  від кута  $\psi$

Як видно з рис. 7, значення максимальної абсолютної похибки кута  $\Delta$  наближається до 0 у діапазоні до  $30^\circ$ – $40^\circ$ . Це свідчить про те, що для високодеталізованих поверхонь, у яких максимальний кут між нормалями у вершинах полігонів не перевищує  $30^\circ$ , максимальна абсолютнона похибка кута  $\Delta$  не перевищує  $0.532^\circ$ .

У процесі тонування, з використанням сферично-кутової інтерполяції нормалей [8], виконуються дії над косинусами кутів, а не над самими кутами. Знайдемо максимальну похибку  $\Delta_{\cos\psi}$ :

$$\Delta_{\cos\psi} = \cos 2\alpha - \cos 2\beta.$$

Підставимо у наведений вираз значення кутів  $\alpha$  і  $\beta$  та використаємо для розрахунків тільки  $\cos\psi$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{\cos\psi} &= \cos\left(2 \arcsin\left(\frac{\sin(\psi/4)}{\cos(\psi/2)}\right)\right) - \cos(\psi/2) = \\ &= \cos\left(2 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{\cos^2(\psi/2)}} \cdot \sqrt{\frac{1-\cos(\psi/2)}{2}}\right)\right) - \sqrt{\frac{1+\cos\psi}{2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \cos \left( 2 \arcsin \left( \sqrt{\frac{1 - \cos(\psi/2)}{2 \cos^2(\psi/2)}} \right) \right) - \sqrt{\frac{1 + \cos \psi}{2}} = \\
 &= \cos \left( 2 \arcsin \left( \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{1 + \cos \psi}{2}}}{2 \cdot \frac{1 + \cos \psi}{2}}} \right) \right) - \sqrt{\frac{1 + \cos \psi}{2}} = \\
 &= \cos \left( 2 \arcsin \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos \psi}}{\sqrt{2} \cdot (1 + \cos \psi)}} \right) \right) - \sqrt{\frac{1 + \cos \psi}{2}} = \\
 &= \cos \left( 2 \arcsin \left( \sqrt{\frac{1}{(1 + \cos \psi)} - \frac{1}{\sqrt{2 + 2 \cos \psi}}} \right) \right) - \sqrt{\frac{1 + \cos \psi}{2}}.
 \end{aligned}$$

Отже, максимальна похибка  $\Delta_{\cos \psi}$  визначається за формулою:

$$\Delta_{\cos \psi} = \cos \left( 2 \arcsin \left( \sqrt{\frac{1}{(1 + \cos \psi)} - \frac{1}{\sqrt{2 + 2 \cos \psi}}} \right) \right) - \sqrt{\frac{1 + \cos \psi}{2}}.$$

На рис. 8, а зображене залежність максимальної абсолютної похибки  $\Delta_{\cos \psi}$  від  $\cos \psi$ , а на рис. 8, б — максимальну відносну похибку  $\delta_{\cos \psi}$  від  $\cos \psi$ .

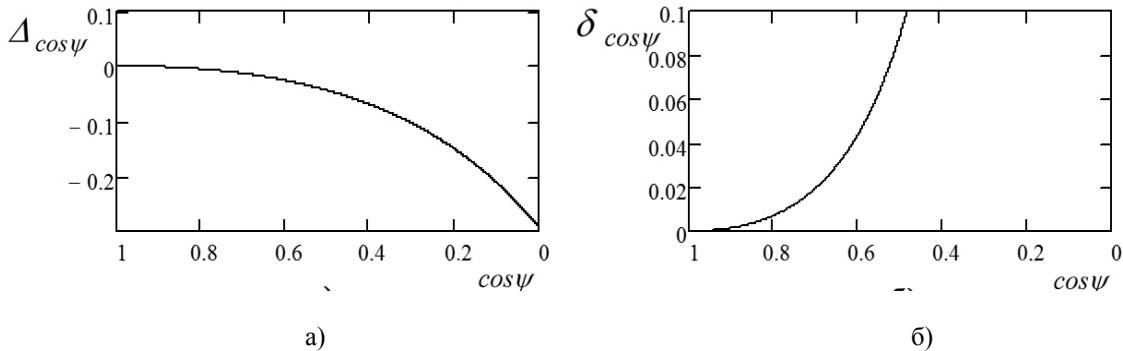


Рис. 8. Максимальні абсолютна  $\Delta_{\cos \psi}$  та відносна  $\delta_{\cos \psi}$  похибки

Умова  $\varphi = \varphi_s = \varphi_m = \varphi_i = \text{const}$  для всього полігона, де  $\varphi_i$  — приріст кута в поточному РР, дає можливість модифікувати метод сферично-кутової інтерполяції, запропонований у [8]. Величина максимальних похибок кутів при такому підході вказує на те, що таку модифікацію методу можна адаптивно застосовувати до полігональної сітки, у якій кути між нормальними не перевищують  $30^\circ$ — $40^\circ$ . Адаптивність полягає в тому, що якщо вхідний полігон має кут  $\psi$  більше  $30^\circ$ — $40^\circ$ , то по-

требно провести його додаткову тріангуляцію. Спрощення розрахунків досягається тим, що обчислення приросту кута відбувається один раз для всього трикутника, а не для кожного рядка растеризації.

## Висновки

Запропонований метод спрощення процедури визначення векторів з використанням сферично-кутової інтерполяції нормалей суттєво підвищує продуктивність зафарбування за методом Фонга за рахунок того, що розрахунки за формулою (1) виконуються один раз для всього полігону, а не для кожного рядка растеризації. Отримано рівняння для розрахунку максимальної похибки  $\Delta_{\cos\psi}$ . Враховуючи характер зміни похибки  $\Delta_{\cos\psi}$  залежно від значення  $\cos\psi$ , запропонований підхід можна застосовувати адаптивно з використанням додаткової тріангуляції для зменшення кута  $\psi$  до  $30^\circ$ – $40^\circ$ . Критерієм його застосування можна використовувати значення  $\cos\psi$ , де  $\cos\psi = \min(\cos\psi_1, \cos\psi_2, \cos\psi_3)$ . Навіть при значенні  $\cos\psi = 0,77$  ( $\psi = 39^\circ$ ) максимальна відносна похибка розрахунків не перевищує 1 %.

1. *Kujik A.A.M.* Faster Phong Shading via Angular Interpolation / A.A.M. Kujik, E.H. Blake // Computer Graphics Forum. — 1989. — Vol. 8. — P. 315–324.
2. *Abbas A.M.* Hardware Implementation of Phong Shading using Spherical Interpolation / A. M. Abbas, L. Szirmay-Kalos, T. Horvath // Periodica Polytechnica. — 2000. — Vol. 44, N 3–4.
3. *Hust A.* Shading by Spherical Linear Interpolation using De Moivre's Formula / A. Hust, T. Barrera, E. Bengtsson // WSCG'03. — Sort Paper. — 2003. — P. 57–60.
4. *Hua Zhang.* Perspective-Correct Normal for Equal Angle Interpolation / Hua Zhang, Changqian Zhu, Hao Shen, Qiang Zhao // Conference Publications IEEE. — 0-7803-9282-5. — 2005. — P. 1020–1024.
5. *Романюк О.Н.* Коректне зафарбування тривимірних зображень при використанні сферично-кутової інтерполяції векторів нормалей / О.Н. Романюк // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. — 2007. — № 2(9). — С. 186–191.
6. *Ami Kim.* 3D Model Retrieval Based on Normal Vector Interpolation Method / Ami Kim, Oubong Gwun, Juwhan Song // Engineering and Technology. — 2009. — N 57.
7. *Reshetov Alexander.* Consistent Normal Interpolation / Alexander Reshetov, Alexei Soupikov, William R. Mark // Proceedings of ACM SIGGRAPH. — 2010. — Vol. 29. — Issue 6, N 142.
8. *Романюк О.Н.* Реалізація рендерингу Фонга з використанням сферично-кутової інтерполяції / О.Н. Романюк, А.В. Чорний // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2004. — № 3. — С. 66–71.
9. *Akenine-Möller T.* Real-Time Rendering / T. Akenine-Möller, N. Hoffman, E. Haines. — Wellesley: A. Peters, 2007. — 1045 p.

Надійшла до редакції 01.06.2012