УДК 004.942.519.87

О. Г. Додонов, А. І. Кузьмичов
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113, Київ, Україна

Оптимальне призначення спеціальних ресурсів для оперативного здійснення комплексних заходів

Оптимальне призначення — «що/кого — куди найкраще розподілити / призначити / розмістити» — найбільш поширений клас практичних ситуацій. На прикладі розв'язання кількох характерних задач про призначення різного рівня складності показано доступну для звичайного дослідника чи користувача техніку побудови та реалізації відповідних комп'ютерних моделей із застосуванням розв'язувачів Excel Solver, OpenSolver, WinQSB.

***Ключові слова**: лінійна (квадратична, узагальнена) задача призначення, локація та розміщення об'єктів, призначення на вузькі місця та цілі, задачі про паросполучення, matching and assignment problems, location-allocation and layout problems.*

Вступ

Починаючи з побуту, і до планування територій із розміщенням там будівель, підприємств чи об'єктів, надання послуг тощо (facility), прийняття оперативних рішень у нештатних чи надзвичайних ситуаціях (збройні конфлікти, аварії, катастрофи), розміщення електронної документації для її розподіленої обробки чи тривалого зберігання, монтаж елементів засобів мікроелектроніки тощо — усюди, де обмежений набір виконавців, спеціального обладнання, елементів цілого, специфічних ресурсів чи даних треба найкращим чином розподілити, розмістити чи облаштувати у заданих чи визначених розрахунками місцях для їхнього подальшого раціонального (оптимального) використання чи функціонування. Адже усе, що кудись призначено, надалі взаємодіє сукупно, всередині та ззовні, на що неодмінно треба зважувати, відшукуючи оптимальне рішення.

Мова йде про комплексну задачу локації і розміщення (*location-allocation*), де складова *location* вказує, КУДИ призначити, а складова *allocation* — ЯК організувати взаємодію призначеного з існуючим оточенням. Маємо гіркі приклади (Чорнобиль, ГЕС Дніпровського каскаду, полігони шкідливих речовин) наче економно локалізованих об'єктів, але без зваженого врахування потенційних наслідків їхнього тривалого функціонування в оточуючих середовищах зі змінюваними властивостями.

В областях прикладної і обчислювальної математики, оптимізаційного та мережевого моделювання задачі про призначення (assignment problems) існує фундаментальний клас важких для реалізації (NP-hard) задач комбінаторної оптимізації. Тож висока прикладна цінність цих моделей й, одночасно, серйозні проблеми їхньої ефективної реалізації — важлива тема наукових досліджень і впровадження їхніх результатів.

Популярність задач про призначення давно зробила їх предметом дослідження різних розділів прикладної математики: теорії графів і мереж, лінійного та нелінійного програмування, комп'ютерних наук, теорії ігор, наукового та операційного менеджменту. Оскільки ця задача часто зводиться до дводольного графа з двома зв'язаними підмножинами вузлів, які, наприклад, відповідають виконавцям і роботам, відшукується максимальне/мінімальне паросполучення графа. У лінійному програмуванні виконавці та роботи визначають структуру матриці початкових даних, і вона є варіантом задачі транспортного типу, у цілочисельному програмуванні — задачею про рюкзак. І кожна з цих задач, маючи, по суті, єдину математичну модель, зорієнтована на певні практичні застосування. Тож досконала реалізація цієї моделі для реальних задач збагачує апарат указаних областей.

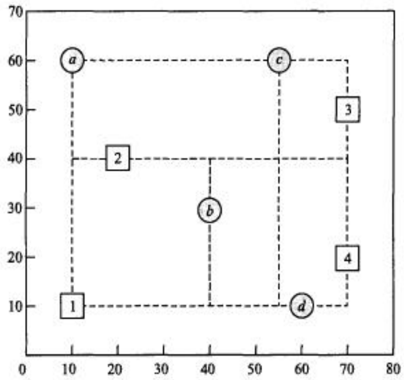
Успішній реалізації моделі задачі про призначення сприяють її одночасна матрична та мережева постановки, що дозволяє скористатися перевагами алгебраїчних засобів (типу симплекс-методу) та дискретних алгоритмів переборного типу: у першому випадку маємо точний метод отримання рішення плюс здійснення потужного аналізу чутливості, але існують завищені вимоги до пам'яті для зберігання матриць, у другому, навпаки — є дещо триваліший, наближений чи евристичний алгоритм, зате більш економний щодо зберігання даних для задач вели-кого розміру. Виходить, що задача про призначення має два «корені»: з 1920-х рр. у теорії графів її досліджують перестановками елементів матриці для отримання *досконалого паросполучення* (*perfect matching problems*) за відомою теоремою Холла «про щасливе одруження» (*marriage theorem*, P. Hall. 1935); з 1950-х рр., задачу про призначення розв'язують винайденим симплекс-методом, пізніше, прискореним перебором як задачу дискретної (комбінаторної) оптимізації.

З цих «коренів» виросли «дерева» інструментальних засобів, це неперервні/дискретні типи даних і відповідні методи, алгоритми та програмні продукти їхньої реалізації, кожен із цих засобів займає нішу щодо своїх можливостей, існують їхні досконалі комбінації типу *network simplex method*, що використовують переваги кожної із цих груп.

Із 2000-х рр. у класі задач про оптимальне призначення сформувалися специфічні постановки, де кожна із підмножин — виконавців і робіт — виступає як одне нероздільне ціле. Це, з одного боку, комплект виконавчих засобів (універсальний багатоопераційний агрегат, екіпаж транспортного засобу, військовий підрозділ чи група з ліквідації наслідків надзвичайної ситуації, кожен з відповідним інструментарієм, технологією та спеціальною підготовкою), з іншого — комплекс специфічних завдань, які треба всі здійснити із застосуванням цих засобів.

Приклади розв'язання задач про призначення

Приклад 1 [2]. На плані цеху цифрами позначено місця старих верстатів, буквами — місця розміщення нових верстатів. Задано потоки деталей у вигляді матриці $F = \{f_{ij}\}$ між кожними i-м старим та j-м новим верстатами. Треба призначити нові верстати на вказані місця, щоби мінімізувати сумарні переміщення деталей між старими та новими верстатами. Усі місця задані своїми координатами $(x_i,\ y_i)$, матриця відстаней від місць розташування старих верстатів до місць призначення нових $D = \{d_{ij}\}$ визначається за прямокутною метрикою: $d_{ij} = |x_i - x_j| + |y_i - y_j|$).



Це «*лінійна задача про призначення*», еквівалент класичної транспортної задачі, специфіка: одиничні праві частини обмежень, однакова кількість виконавців і робіт, бінарний тип шуканих змінних.

Задача оптимізації.

I. Знайти матрицю призначення $X = \{x_{ij}\}$, $i, j = 1, \ldots, 4$, щоб

II. ЦФ $P = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} f_{ij} d_{ij} x_{ij} \to \min$

III. За обмежень: $\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1$, $\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1$

та граничних умов: $X \in \{0,1\}$.

Результат розв'язку задачі наведено на рис. 1.

	a	b	c	d
A	0	0	0	1
B	0	1	0	0
C	1	0	0	0
D	0	0	1	0

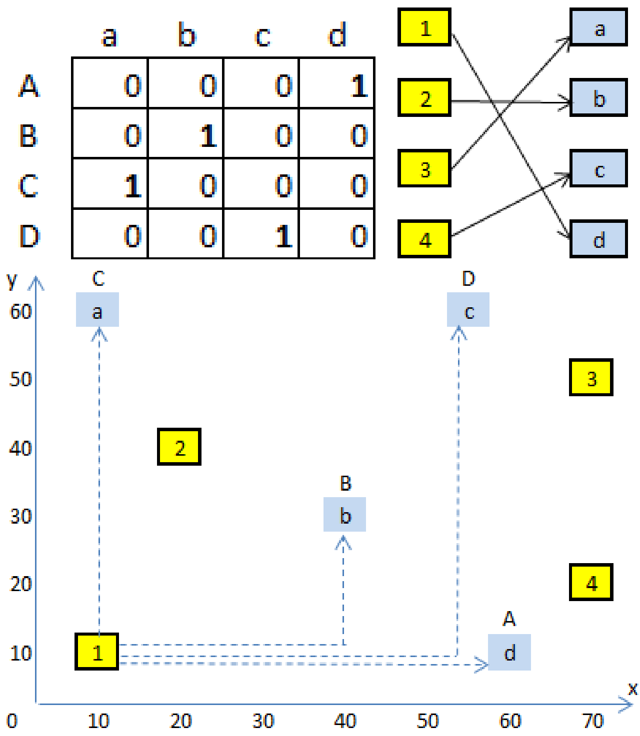


Рис. 1. Матриця призначень, паросполучення, показані потоки лише від 1-го верстату

Приклад 2. *n* виконавців призначаються для здійснення *n* робіт. Кожен виконавець може виконувати будь-яку роботу за заданою «ціною» (витратами певних ресурсів, у першу чергу, часу). Треба виконати комплекс робіт за критерієм мінімізації максимальної ціни, що виникне в процесі призначення. Це «***мінімаксна задача про призначення у вузьких місцях***». У виробничих процесах є типова проблема — розподілити операції між машинами; певна операція із максимальною тривалістю визначає максимальну ціну процесу, це «вузьке місце» технологічного циклу, зробити цю ціну якнайменшою — цільова функція.

Застосовуємо аналітичний інструментарій: лінійне програмування, алгоритми упорядкування та перестановок елементів матриці цін.

Задача оптимізації.

I. Знайти матрицю призначення $X = \{x_{ij}\}$, $i, j = 1, \ldots, 4$, щоб

II. ЦФ $P = \max \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij} \to \min$

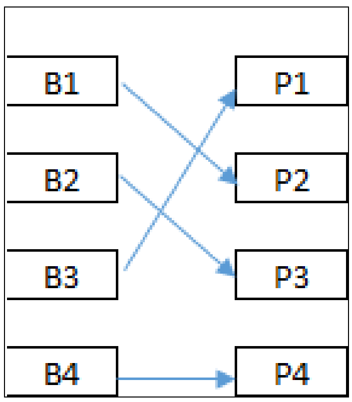
III. За обмежень: $\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1$, $\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1$

та граничних умов: $X \in \{0,1\}$.

Результат розв'язку проілюстровано на рис. 2.

C	P1	P2	P3	P4
B1	8	2	3	3
B2	2	7	5	8
B3	3	9	8	4
B4	2	5	6	3

					Sum
B1	0	1	0	0	1
B2	0	0	1	0	1
B3	1	0	0	0	1
B4	0	0	0	1	1
Sum	1	1	1	1	13
				ЦФ =	13 max



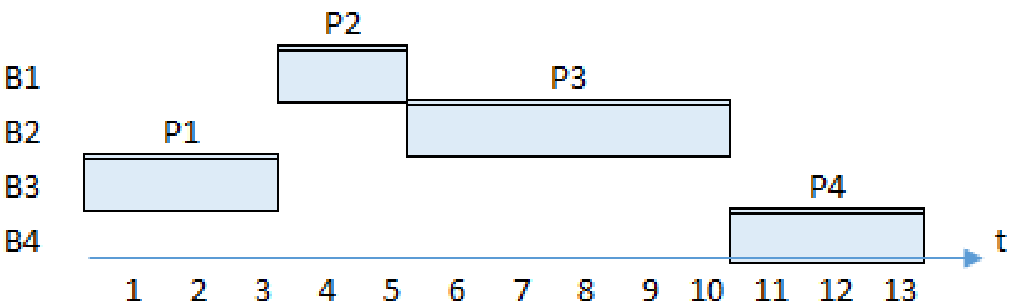


Рис. 2. Часовий графік процесу

Приклад 3. На плані нового цеху 10×10 цифрами позначено місця для розміщення 8-ми верстатів; за заданими координатами місць за прямокутною метрикою обчислено матрицю D відстаней між місцями. Задано матрицю потоків F між верстатами та, за необхідності, матрицю $C = \{c_{ij}\}$ транспортних витрат (у прикладі одиничні) — рис. 3.

Треба призначити верстати на вказані місця, щоби мінімізувати сумарні переміщення деталей між верстатами.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2		1				8				
3										
4			2							5
5										
6		3								
7										
8										
9		7				6				
10										4

D	1	2	3	4	5	6	7	8
1	9	6	10	16	7	3	14	10
2	7	8	20	14	15	11	8	0
3	7	8	20	14	15	11	8	0
4	7	8	20	14	15	11	8	0
5	4	3	15	11	10	6	9	5
6	7	8	20	14	15	11	8	0
7	7	8	20	14	15	11	8	0
8	7	8	20	14	15	11	8	0

F	1	2	3	4	5	6	7	8
1		13	6	12	9	9	7	8
2	12		11	8	11	10	5	5
3	13	5		12	12	7	12	12
4	11	8	13		8	10	12	5
5	8	7	5	11		9	8	7
6	9	5	12	7	25		13	5
7	6	5	7	5	10	6		6
8	6	6	12	13	13	11	5	

Рис. 3. План, матриці відстаней і потоків

На перший погляд здається, що маємо аналогічну задачу і існує спокуса скористатися попередньою моделлю. Хибність такого підходу полягає в уособленні *заданих* місць для розміщення (1, 2, …) із віртуальними місцями розташування верстатів $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, …, адже ці місця ще *треба відшукати*, наприклад, може статися, що $\varphi(1) = 7$, тобто, 1-й новий верстат призначається на 7-ме місце. Адже на основі матриці D послідовно формується матриця $\hat{D}$ відстаней між верстатами, яка використовується у цільовій функції.

Це приклад дуже складної в обчислювальному сенсі задачі комбінаторної оптимізації під назвою «***квадратична задача про призначення***», вперше поставлена в 1957 р. Хоча існує її змішана цілочисельна модель, її зазвичай розв'язують за допомогою евристичних алгоритмів, які розраховані на задачі великого розміру та побудовані на ітераційній послідовності перестановок рядків/стовпців покроково оновлюваної матриці $\hat{D}$, за якою надалі обчислюється значення цільової функції $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} f_{ij}\hat{d}_{ij}x_{ij}$.

Одним із таких відомих алгоритмів є *CRAFT*[1] (*Computerized Relative Allocation of Facilities*), що реалізований у пакеті WinQSB.

Окрім типового застосування при розміщенні виробничих потужностей чи споруд, розв'язком квадратичної задачі про призначення є розміщення зв'язаних електронних компонентів на друкованих платах чи інтегральних схемах, що здійснюється системами автоматизованого проектування в електронній індустрії (рис. 4).

In	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
F1	1							
F2		1						
F3			1					
F4				1				
F5					1			
F6						1		
F7							1	
F8								1

Fin	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
F1		1						
F2	1							
F3							1	
F4			1					
F5								1
F6					1			
F7				1				
F8						1		

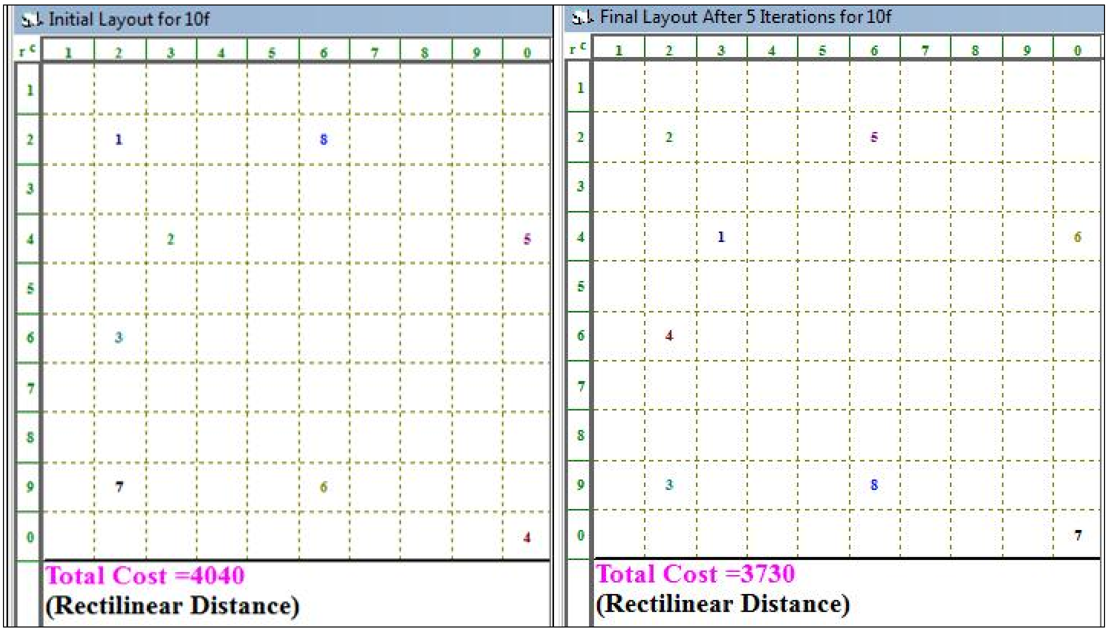


Рис. 4. Початкове та завершальне призначення

Приклад 4. Задано дві множини: *m* машин і *n* робіт, початкові дані: питомі витрати ресурсу (***R***), бюджет ресурсу для кожної машини (***B***), питомі витрати часу (***T***). Треба призначити машини для виконання робіт за критерієм мінімізації тривалості здійснення робіт, це — «***узагальнена задача про призначення***».

[1] Buffa E. A Heuristic Algorithm and Simulation Approach to Relative Location of Facilities, Man. Sci., 1963

Задача оптимізації.

I. Знайти матрицю призначення X розміром 4×6, щоб

II. ЦФ $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} t_{ij}x_{ij} \to \min$ (загальні витрати часу)

III. За обмежень: $\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1,\ \ \sum_{j=1}^{6} r_{ij}x_{ij} \le b_i$

та граничних умов: $X \in \{0,1\}$.

Результат розв'язку даної задачі показано на рис. 5.

R	P1	P2	P3	P4	P5	P6	ЛЧ	Бюджет
M1	1	0,5	4	3	2	1	1	**4**
M2	2	3	2	1	1	3	2	**3**
M3	1	2	1	1	2	2	1	**3**
M4	1	1	2	2	2	2	3	**4**

T	P1	P2	P3	P4	P5	P6
M1	15	20	11	12	10	19
M2	17	11	15	14	11	13
M3	20	18	12	16	15	20
M4	18	13	20	12	15	12

X	P1	P2	P3	P4	P5	P6	ЛЧ	Парк
M1	**1**	0	0	0	0	0	1	**1**
M2	0	0	0	**1**	**1**	0	2	**3**
M3	0	0	**1**	0	0	0	1	**1**
M4	0	**1**	0	0	0	**1**	2	**2**
	1	1	1	1	1	1	77	ЦФ

Рис. 5. Оптимальне призначення (X)

Приклад 5. Для мінімізації живучості (тобто, надання максимальних втрат) 7-м джерелам небезпечних проявів (цілей) треба призначити комплект із 5-ти одиниць спеціальних засобів. Задано: матрицю ефективності ***P*** (ймовірнісні оцінки надання шкоди) розміром 5×7, бюджет ***V*** (оснащення комплекту, кількість одиниць кожного типу), рівень агресивності цілей ***A*** (цінність).

Задача оптимізації:

I. Знайти матрицю призначення X розміром 5×7, щоб

II. ЦФ (загальна живучість) $\sum_{j=1}^{7} A_j \prod_{i=1}^{5} q_{ij}^{x_{ij}} \to \min$, $q_{ij} = 1 - p_{ij}$ — оцінка живучості

III. За обмежень: $\sum_{j=1}^{7} x_{ij} \le B_i$

та граничних умов: X — цілого типу.

На рис. 6 показано: початкові дані (P, B, A); проміжні (Q, V) та кінцевий (X) результати.

Цінність цілей

25	**35**	**50**	**75**	**20**	**25**	**45**	**275**
12,3	**10,9**	**15,0**	**2,4**	**10,2**	**4,5**	**5,5**	**60,7**

P	Ц1	Ц2	Ц3	Ц4	Ц5	Ц6	Ц7	Бюджет
M1	0,30	0,20	0,05	0,82	0,34	0,20	0,08	**4**
M2	0,10	0,60	0,50	0,38	0,17	0,41	0,03	**1**
M3	0,40	0,50	0,40	0,69	0,40	0,82	0,67	**3**
M4	0,24	0,13	0,24	0,34	0,49	0,45	0,63	**2**
M5	0,30	0,69	0,18	0,92	0,58	0,15	0,25	**1**

Q	Ц1	Ц2	Ц3	Ц4	Ц5	Ц6	Ц7
M1	0,70	0,80	0,95	0,18	0,66	0,80	0,92
M2	0,90	0,40	0,50	0,62	0,83	0,59	0,97
M3	0,60	0,50	0,60	0,31	0,60	0,18	0,33
M4	0,76	0,87	0,76	0,66	0,51	0,55	0,37
M5	0,70	0,31	0,82	0,08	0,42	0,85	0,75

V	Ц1	Ц2	Ц3	Ц4	Ц5	Ц6	Ц7
M1	0,49	1,00	1,00	0,03	1,00	1,00	1,00
M2	1,00	1,00	0,50	1,00	1,00	1,00	1,00
M3	1,00	1,00	0,60	1,00	1,00	0,18	0,33
M4	1,00	1,00	1,00	1,00	0,51	1,00	0,37
M5	1,00	0,31	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,49	0,31	0,30	0,03	0,51	0,18	0,12
	12,3	**10,9**	**15,0**	**2,4**	**10,2**	**4,5**	**5,5**

X	Ц1	Ц2	Ц3	Ц4	Ц5	Ц6	Ц7	Зайнято
M1	**2**	0	0	**2**	0	0	0	4
M2	0	0	**1**	0	0	0	0	1
M3	0	0	**1**	0	0	**1**	**1**	3
M4	0	0	0	0	**1**	0	**1**	2
M5	0	**1**	0	0	0	0	0	1
	2	1	2	2	1	1	2	

Рис. 6. Оптимальне призначення

Використаний повністю наявний комплект спеціальних засобів дозволив зменшити сумарний рівень агресивності цілей із 275 до 60,7 ум. од.

Висновки

Наведені приклади демонструють наявність доступних і досить ефективних аналітичних інструментів для розв'язання практичних оптимізаційних задач про призначення класу NP-hard, розміри яких досягають кількох сотень елементів відповідних шуканих матриць. Кожен розв'язок задачі про оптимальне призначення є одночасно розв'язком відповідної задачі про паросполучення.

1. Network Flows / Ahuja R. et al. Prentice-Hall, 1993. 863 p.

2. Таха Х. Введение в исследование операций. 7-е изд./пер. с англ. Москва: Вильямс, 2005. 903 с.

3. Burkard R. et al. Assignment Problems. SIAM, 2009. 402 p.

4. Додонов О.Г., Кузьмичов А.І. Модель «max-min» у задачах захисту об'єктів комунікаційних мереж. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних.* 2009. Т. 11. № 4. С. 78–88.

5. Eiselt H., Marianov V. Foundation of Location Analysis. Springer, 2011. 524 p.

6. Daskin M. Network and Discrete Location. Models, Algorithms and Application. 2-d ed. Wiley, 2013. 535 p.

7. Кузьмичев А.И. Оптимальное размещение средств контроля для защиты объекта: задачи, модели, реализация в Excel. *Инф. технологии и безопасность: основы обеспечения инф. безопасности*. 2014. Вып. 14. С. 103–109.

8. Baker K. Optimization Modeling with Spreadsheets. 3-d ed. Thomson, 2015. 356 p.

Надійшла до редакції 21.12.2016