УДК 004.942; 512.554

С. И. Клипков
Главный информационно-вычислительный центр НЭК «Укрэнерго»
ул. С. Петлюры, 27, 01032 Киев, Украина

Гиперкомплексные параметрические числовые системы в математическом моделировании

Рассмотрены свойства числовых систем второго ранга над полем комплексных чисел, представляющих собой элементы множества, описываемого обобщенной параметрической системой гиперкомплексных чисел. Показано, что квадриплексные числа и кватернионы являются частными случаями указанной параметрической системы гиперкомплексных чисел.

Ключевые слова: *гиперкомплексная числовая система, квадриплексные числа, кватернионы, обратные элементы, делители нуля, коммутативность, ассоциативность.*

Вступление

Одной из важных задач теории и практики гиперкомплексных числовых систем является задача их классификации. В настоящее время существует ряд принципов указанной классификации [1]. В данной статье предлагается подход к классификации гиперкомплексных числовых систем, основанный на введении комплексного параметра в законы композиции базисных элементов 1, i, j и ij, где i, j — мнимые единицы. Умножение базисных элементов при использовании такого подхода показано в табл. 1.

Таблица 1. Умножение базисных элементов при введении комплексного параметра в законы их композиции

	1	i	j	ij
1	1	i	j	ij
i	i	-1	ij	$-j$
j	j	$f_1(k',k'')ij - f_2(k',k'')j$	-1	$f_4(k',k'') - f_3(k',k'')i$
ij	ij	$-f_2(k',k'')ij - f_1(k',k'')j$	$-i$	$f_3(k',k'') + f_4(k',k'')i$

Как следует из приведенной таблицы, в клетках, содержащих комбинации ji, jij, iji и $ijij$, переход к принятым базисным элементам осуществляется с помощью отдельных вещественных функций f_1, f_2, f_3, f_4, зависящих от действительных составляющих некоторого комплексного параметра гиперкомплексной системы k', k''.

В работе [2] описана система гиперкомплексных чисел $\mathbf{H}$, для которой операция умножения определена параметрическим выражением

$$(\dot{A}+\dot{B}j)(\dot{C}+\dot{D}j) = \dot{A}\dot{C} - \dot{B}\dot{D}e^{-i2\dot{k}\alpha_D} + (\dot{A}\dot{D} + \dot{B}\dot{C}e^{-i2\dot{k}\alpha_C})j, \qquad (1)$$

где $\alpha_D = \operatorname{arctg}\dfrac{D''}{D'}$ — аргумент комплексного числа $\dot{D} = D' + D''i$; $\alpha_C = \operatorname{arctg}\dfrac{C''}{C'}$ — аргумент комплексного числа $\dot{C} = C' + C''i$; $\dot{k} = k' + k''i$ — комплексный параметр гиперкомплексной системы $\mathbf{H}$ $(\dot{k} \in \mathbf{C})$. Рассматриваемую обобщенную систему гиперкомплексных чисел в дальнейшем будем называть параметрической. Как следует из выражения (1), термин «параметрическая система гиперкомплексных чисел» является обозначением бесконечного множества гиперкомплексных числовых систем, каждой из которых соответствует свой особый закон умножения, определяемый конкретным значением параметра $\dot{k}$.

В частности, при значении параметра $\dot{k} = \dot{0} = 0 + 0i$ конструируемая система гиперкомплексных чисел является квадриплексными числами, а при значении параметра $\dot{k} = \dot{1} = 1 + 0i$ — кватернионами, так как при указанных значениях параметра из выражения (1) следуют соответственно умножения квадриплексных чисел и кватернионов [2].

При других значениях параметра $\dot{k}$ выражение (1) представляет собой закон умножения элементов гиперкомплексных числовых систем, которые наряду с квадриплексными числами и кватернионами также являются частными случаями параметрической системы гиперкомплексных чисел $\mathbf{H}$. Указанные числовые системы в общем случае представляют собой некоммутативные, неассоциативные алгебры, не удовлетворяющие в полной мере аксиомам кольца [2]. Прикладное значение рассматриваемых числовых систем для квадриплексных чисел, кватернионов и ряда действительных значений рассматриваемого параметра $(\dot{k} = k' + 0i)$ показано в [3, 4], где они применяются для математического моделирования режимов работы электроэнергетических систем.

В работе [2] показано, что при значениях параметра гиперкомплексной системы $\dot{k} \neq \dot{0}$, $\dot{k} \neq \dot{1}$ для операции умножения в общем случае не выполняются коммутативный и ассоциативный законы: $\vec{A}\vec{B} \neq \vec{B}\vec{A}$, $\vec{A}(\vec{B}\vec{C}) \neq (\vec{A}\vec{B})\vec{C}$. Кроме того, выполняется только один из дистрибутивных законов: $(\vec{B}+\vec{C})\vec{A} = (\vec{B}\vec{A} + \vec{C}\vec{A})$, но $\vec{A}(\vec{B}+\vec{C}) \neq (\vec{A}\vec{B} + \vec{A}\vec{C})$. Таким образом, анализируемые системы гиперкомплексных чисел можно рассматривать как неассоциативные почти-кольца.

Представление элементов параметрической системы гиперкомплексных чисел **H** в действительных составляющих

Рассмотрим параметрическую систему гиперкомплексных чисел **H** как алгебру ранга четыре над полем действительных чисел. Отметим, что появляющиеся при умножении используемых базисных элементов 1, i, j и ij комбинации мнимых единиц ji, jij, iji и $ijij$ приводятся к выбранным базисным элементам заменой произведения ji на произведение ij. Поэтому для установления правил умножения всех базисных элементов необходимо определить значение произведения ji.

Из выражения (1) вытекает, что при умножении чисел гиперкомплексной системы **H** выполняются соотношения $j\dot{D} = \dot{D}e^{-i2\dot{k}\alpha_D}j$ и $j\dot{C} = \dot{C}e^{-i2\dot{k}\alpha_C}j$. Следовательно, перемещение мнимой единицы j относительно любого комплексного числа $\dot{G} = G' + G''i$ в рамках гиперкомплексной системы **H** связано с выполнением условия

$$ji = \dot{R}_G ij = (R'_G + R''_G i)ij, \tag{2}$$

где
$$R'_G = \frac{e^{2k''\alpha_G}[G''\cos(2k'\alpha_G) - G'\sin(2k'\alpha_G)]}{G''};$$

$$R''_G = -\frac{e^{2k''\alpha_G}[G'\cos(2k'\alpha_G) + G''\sin(2k'\alpha_G)] - G'}{G''}.$$

Таким образом, некоммутативность умножения мнимых единиц i и j в данном случае описывается более общим соотношением, чем соотношение $ji = -ij$, используемое при конструировании известных некоммутативных числовых систем, поскольку $\dot{R}_G$ зависит от действительных составляющих комплексного параметра $\dot{k}$ гиперкомплексной системы **H** и действительных составляющих комплексного числа $\dot{G}$, относительно которого перемещается мнимая единица j.

С учетом (2) закон умножения (1) в действительных составляющих может быть представлен в виде табл. 2.

Таблица 2. Умножение элементов параметрической системы гиперкомплексных чисел **H**

	1	i	j	ij
1	1	i	j	ij
i	i	-1	ij	$-j$
j	j	$R'_C ij - R''_C j$	-1	$R''_D - R'_D i$
ij	ij	$-R''_C ij - R'_C j$	$-i$	$R'_D + R''_D i$

Из выражения (2) следует, что для квадриплексных чисел $(\dot{k}=\dot{0})$ $R'_C = R'_D = 1$, $R''_C = R''_D = 0$. Полученные значения составляющих $\dot{R}_C$, $\dot{R}_D$ указывают на коммутативность квадриплексных чисел, а рассматриваемая таблица принимает вид, соответствующий таблице их умножения [1]. Для кватернионов $(\dot{k}=\dot{1})$ $R'_C = R'_D = -1$, $R''_C = R''_D = 0$. При указанных значениях выражение (2) преобразуется в выражение $ji = -ij$, а таблица умножения, с учетом соотношения $ij = k$, приобретает вид, соответствующий умножению кватернионов.

Определение обратных элементов параметрической системы гиперкомплексных чисел H

Выражение для левого обратного элемента можно в общем случае определить из выражения (1). Действительно, параметрическое гиперкомплексное число $\vec{A} = \dot{A} + \dot{B}j$ будет обратным к параметрическому гиперкомплексному числу $\vec{B} = \dot{C} + \dot{D}j$, если удовлетворяется система комплексных уравнений:

$$\dot{A}\dot{C} - \dot{B}\dot{D}e^{-i2\dot{k}\alpha_D} = \dot{1}, \tag{3}$$

$$\dot{A}\dot{D} + \dot{B}\dot{C}e^{-i2\dot{k}\alpha_C} = \dot{0}. \tag{4}$$

Решение указанной системы уравнений приводит к следующим выражениям для комплексных составляющих левого обратного элемента:

$$\dot{A} = \frac{\dot{C}e^{-i2\dot{k}\alpha_C}}{\dot{C}^2 e^{-i2\dot{k}\alpha_C} + \dot{D}^2 e^{-i2\dot{k}\alpha_D}}, \tag{5}$$

$$\dot{B} = \frac{-\dot{D}}{\dot{C}^2 e^{-i2\dot{k}\alpha_C} + \dot{D}^2 e^{-i2\dot{k}\alpha_D}}. \tag{6}$$

Следует отметить, что при значении параметра гиперкомплексной системы $\dot{k} = \dot{0}$ выражения (5), (6) приводят к комплексным составляющим обратного элемента квадриплексного числа

$$\dot{A} = \frac{\dot{C}}{\dot{C}^2 + \dot{D}^2}, \tag{7}$$

$$\dot{B} = \frac{-\dot{D}}{\dot{C}^2 + \dot{D}^2}, \tag{8}$$

а при значении $\dot{k} = \dot{1}$ непосредственно следуют известные выражения для обратного элемента кватерниона

$$\dot{A} = \frac{\hat{C}}{\dot{C}\hat{C} + \dot{D}\hat{D}}, \tag{9}$$

$$\dot{B} = \frac{-\dot{D}}{\dot{C}\hat{C} + \dot{D}\hat{D}}, \tag{10}$$

поскольку числители выражений (9), (10) представляют собой комплексные составляющие сопряженного кватерниона, а их знаменатель является квадратом модуля кватерниона.

Определение правых обратных элементов параметрической гиперкомплексной системы $\mathbf{H}$ связано с нахождением комплексных составляющих $\dot{C}$, $\dot{D}$, удовлетворяющих уравнениям системы (3), (4). Как следует из указанной системы уравнений, наряду с рассматриваемыми комплексными составляющими в состав неизвестных входят также их аргументы, умноженные на параметр гиперкомплексной системы $\dot{k}$, что не позволяет получить аналитические выражения для определения правого обратного элемента в общем виде.

Общим утверждением для всех значений параметра $\dot{k}$ в данном случае может быть только то, что правых обратных элементов не имеют элементы гиперкомплексной системы чисел $\mathbf{H}$, которые являются левыми делителями нуля. Это следует из того, что, как показано ниже, знаменатель выражений для комплексных составляющих $\dot{C}$, $\dot{D}$, которые могут быть представлены в виде

$$\dot{C} = \frac{\dot{A}}{\dot{A}^2 + \dot{B}^2 e^{-i2\dot{k}(\alpha_C + \alpha_D)}}, \tag{11}$$

$$\dot{D} = \frac{-\dot{B}e^{-i2\dot{k}\alpha_C}}{\dot{A}^2 + \dot{B}^2 e^{-i2\dot{k}(\alpha_C + \alpha_D)}}, \tag{12}$$

соответствует условию определения левых делителей нуля.

Определение делителей нуля параметрической системы гиперкомплексных чисел H

Для определения делителей нуля параметрической системы гиперкомплексных чисел $\mathbf{H}$ рассмотрим систему уравнений:

$$\dot{A}\dot{C} - \dot{B}\dot{D}e^{-i2\dot{k}\alpha_D} = \dot{0}, \tag{13}$$

$$\dot{A}\dot{D} + \dot{B}\dot{C}e^{-i2\dot{k}\alpha_C} = \dot{0}. \tag{14}$$

Решение указанной системы относительно комплексных составляющих $\dot{C}$, $\dot{D}$ правого множителя $\vec{B} \in \mathbf{H}$ при условиях $\dot{A} \neq \dot{0}$, $\dot{B} \neq \dot{0}$ приводит к уравнению

$$\dot{C}^2 e^{-i2\dot{k}\alpha_C} + \dot{D}^2 e^{-i2\dot{k}\alpha_D} = \dot{0}, \tag{15}$$

которое позволяет установить соотношения между аргументами α_C, α_D и модулями C, D комплексных составляющих $\dot{C}$, $\dot{D}$, определяющих правые делители нуля

$$\alpha_C = \alpha_D + \Delta\alpha\,, \tag{16}$$

$$C = De^{-k''\Delta\alpha}\,, \tag{17}$$

где $\Delta\alpha$ — необходимая для выполнения рассматриваемого условия разность между аргументами α_C и α_D, которая вычисляется по формуле

$$\Delta\alpha = \pm\frac{\pi}{2(1-k')}\,. \tag{18}$$

Отметим, что уравнение (15) соответствует равенству нулю знаменателей выражений (5), (6) для определения левого обратного элемента, из чего следует, что правые делители нуля не имеют левых обратных элементов.

Теперь из системы уравнений (13), (14) определим выражения для левых делителей нуля. Относительно составляющих $\dot{A}$, $\dot{B}$ указанная система приводится к уравнению

$$\dot{A}^2 + \dot{B}^2 e^{-i2\dot{k}(\alpha_C+\alpha_D)} = \dot{0}\,, \tag{19}$$

из которого можно получить соотношения между аргументами α_A, α_B и модулями A, B комплексных составляющих $\dot{A}$, $\dot{B}$ гиперкомплексного числа $\vec{A} \in \mathbf{H}$, определяющих левые делители нуля:

$$\alpha_A = \alpha_B \mp \frac{\pi}{2} - k'(\alpha_C + \alpha_D)\,, \tag{20}$$

$$A = Be^{k''(\alpha_C+\alpha_D)}\,. \tag{21}$$

Отметим противоположный характер использования знаков «+» и «–» в выражениях (18) и (20).

Таким образом, если для некоторого числа параметрической гиперкомплексной системы $\vec{B} \in \mathbf{H}$ не удовлетворяются соотношения (16), (17), т.е. это число не является правым делителем нуля, то для данного числа существует левый обратный элемент, комплексные составляющие которого вычисляются по формулам (5), (6). Если же некоторое число $\vec{B} \in \mathbf{H}$ представляет собой правый делитель нуля, то в этом случае для него всегда можно определить число $\vec{A} \in \mathbf{H}$, являющееся левым делителем нуля, используя соотношения (20), (21). При этом $\vec{A}\vec{B} = \vec{0}$. Отметим, что в общем случае левые делители нуля зависят от аргументов комплексных составляющих правых делителей нуля.

Для квадриплексных чисел $(\dot{k} = \dot{0})$ соотношения (16), (17) между аргументами и модулями комплексных составляющих гиперкомплексного числа $\vec{B}$, определяющие его принадлежность к правым делителям нуля, и соотношения (20), (21) между аргументами и модулями комплексных составляющих гиперкомплексного числа $\vec{A}$, определяющие его принадлежность к левым делителям нуля, соответственно принимают вид $\alpha_C = \alpha_D \pm \frac{\pi}{2}$, $C = D$ и $\alpha_A = \alpha_B \mp \frac{\pi}{2}$, $A = B$. В действительных составляющих указанные условия имеют следующий вид. Для правых делителей нуля $C' = -D''$, $C'' = D'$ или $C' = D''$, $C'' = -D'$. Для левых делителей нуля $A' = B''$, $A'' = -B'$ или $A' = -B''$, $A'' = B'$. Таким образом, в случае квадриплексных чисел также можно говорить о правых и левых делителях нуля в смысле их совместного использования. Чтобы получить квадриплексный нуль, квадриплексные делители нуля должны умножатся следующим образом:

$$[(B'' - B'i) + (B' + B''i)j] \times [(-D'' + D'i) + (D' + D''i)j] = \vec{0} \tag{22}$$

или

$$[(-B'' + B'i) + (B' + B''i)j] \times [(D'' - D'i) + (D' + D''i)j] = \vec{0}. \tag{23}$$

Другие комбинации умножения делителей нуля приводят в результате не к квадриплексному нулю, а к квадриплексному числу, которое, в свою очередь, является делителем нуля. Отметим также, что условия неделимости квадриплексных чисел можно получить из выражений (7), (8), приравняв их знаменатель к нулю.

Как следует из выражения (18), правых делителей нуля, а, следовательно, и левых не имеют гиперкомплексные числовые системы, у которых действительная составляющая параметра $\dot{k}$ равна единице $(k' = 1)$, так как в этом случае разность аргументов $\Delta\alpha$ становится бесконечно большим числом. В первую очередь, к таким числовым системам относятся кватернионы $(\dot{k} = \dot{1})$, что вполне закономерно, поскольку кватернионы являются алгеброй с делением. Однако наряду с кватернионами, $\Delta\alpha$ нельзя определить для любой другой гиперкомплексной числовой системы, которая задается параметром $\dot{k} = 1 + k''i$. Таким образом, все гиперкомплексные числовые системы, характеризующиеся параметром $\dot{k} = 1 + k''i$, являются алгебрами с делением. Отметим, что среди указанных алгебр кватернионы являются единственной ассоциативной числовой системой.

Определение модулей элементов параметрической системы гиперкомплексных чисел H

Из выражений (5), (6) можно определить левый модуль элементов системы гиперкомплексных чисел $\mathbf{H}$. Для этого необходимо умножить комплексный знаменатель этих выражений на его сопряженное значение. В результате получим действительный неотрицательный полином четвертой степени

$$P_{\text{Л}} = C^4 e^{4k''\alpha_C} + D^4 e^{4k''\alpha_D} + 2C^2 D^2 e^{2k''(\alpha_C + \alpha_D)} \cos[2(1-k')(\alpha_C - \alpha_D)] \geq 0 . \quad (24)$$

Указанный полином может рассматриваться как четвертая степень модуля. Равенство нулю полинома (24) возможно в двух случаях, когда $\vec{B} = \vec{0}$ или когда $\vec{B}$ является правым делителем нуля, что следует из сопоставления выражений (16), (18) и (24).

Подставляя в (24) значения $\dot{k}$, соответствующие квадриплексным числам и кватернионам, получаем известные выражения для четвертой степени модуля указанных числовых систем:

— для квадриплексных чисел

$$P_{\text{Л}} = C'^4 + C''^4 + D'^4 + D''^4 + 2C'^2C''^2 + 2C'^2D'^2 - 2C'^2D''^2 -$$
$$-2C''^2D'^2 + 2C''^2D''^2 + 2D'^2D''^2 + 8C'C''D'D'' ; \quad (25)$$

— для кватернионов

$$P_{\text{Л}} = (C'^2 + C''^2 + D'^2 + D''^2)^2 . \quad (26)$$

Формулы (11), (12) позволяют получить еще одно выражение для действительного модуля элементов системы гиперкомплексных чисел $\mathbf{H}$, связанного с вычислением правых обратных элементов. Умножая знаменатель указанных формул на его сопряженное значение, получим неотрицательный полином

$$P_{\text{П}} = A^4 + B^4 e^{4k''(\alpha_C + \alpha_D)} + 2A^2B^2 e^{2k''(\alpha_C + \alpha_D)} \cos\{2[(\alpha_A - \alpha_B) + k'(\alpha_C + \alpha_D)]\} \geq 0 . \quad (27)$$

Приведенный полином также может рассматриваться как четвертая степень модуля. Равенство нулю полинома (27) возможно в двух случаях: когда $\vec{A} = \vec{0}$ или когда $\vec{A}$ является левым делителем нуля, что следует из сопоставления выражений (20) и (27). Отметим, что для квадриплексных чисел $(\dot{k} = \dot{0})$ и кватернионов $(\dot{k} = \dot{1}, \alpha_C = -\alpha_A ,\ \alpha_D = \alpha_B \pm \pi)$ значения полиномов $P_{\text{Л}}$ и $P_{\text{П}}$, а, значит, и соответствующих им модулей совпадают, что вытекает непосредственно из соотношений (24), (27). Что касается гиперкомплексных числовых систем с другими значениями параметра $\dot{k}$, то для них значения левого и правого модуля отличаются между собой.

Использование параметрической системы гиперкомплексных чисел в математическом моделировании

Рассмотрим линейное гиперкомплексное уравнение

$$\vec{X}\vec{A} = \vec{B} , \quad (28)$$

где $\vec{X} = \dot{X} + \dot{Y}j$; $\vec{A} = \dot{A} + \dot{B}j$; $\vec{B} = \dot{C} + \dot{D}j$. Указанное уравнение можно представить в виде системы двух комплексных уравнений

$$\dot{X}\dot{A} - \dot{Y}\dot{B}e^{-i2\dot{k}\alpha_B} = \dot{C}\,, \tag{29}$$

$$\dot{X}\dot{B} + \dot{Y}\dot{A}e^{-i2\dot{k}\alpha_A} = \dot{D}\,, \tag{30}$$

которая имеет следующее решение:

$$\dot{X} = \frac{\dot{C}\dot{A}e^{-i2\dot{k}\alpha_A} + \dot{D}\dot{B}e^{-i2\dot{k}\alpha_B}}{\dot{A}^2e^{-i2\dot{k}\alpha_A} + \dot{B}^2e^{-i2\dot{k}\alpha_B}}, \tag{31}$$

$$\dot{Y} = \frac{\dot{D}\dot{A} - \dot{C}\dot{B}}{\dot{A}^2e^{-i2\dot{k}\alpha_A} + \dot{B}^2e^{-i2\dot{k}\alpha_B}}\,. \tag{32}$$

Отметим, что если правая часть уравнения (28) является комплексным числом ($\dot{D} = \dot{0}$), то из выражений (5), (6) и (31), (32) следует решение

$$\vec{X} = \dot{C}\vec{A}_{\text{л}}^{-1}, \tag{33}$$

где $\vec{A}_{\text{л}}^{-1}$ — левый обратный элемент гиперкомплексного числа $\vec{A}$.

Исследуем возможные гиперкомплексные решения обычного квадратного уравнения с комплексными коэффициентами

$$\vec{X}\vec{X} + \dot{A}\vec{X} + \dot{B} = \dot{0}\,. \tag{34}$$

Гиперкомплексное уравнение (34) приводится к системе двух комплексных уравнений:

$$\dot{X}^2 - \dot{Y}^2e^{-i2\dot{k}\alpha_Y} + \dot{A}\dot{X} + \dot{B} = \dot{0}\,, \tag{35}$$

$$\dot{Y}(\dot{X} + \dot{X}e^{-i2\dot{k}\alpha_X} + \dot{A}) = \dot{0}\,. \tag{36}$$

Как следует из уравнения (36), решения рассматриваемой системы можно разделить на две части. Первые два решения соответствуют условию $\dot{Y} = \dot{0}$. В этом случае система уравнений преобразуется в обычное приведенное квадратное уравнение с комплексными коэффициентами, тривиальными решениями которого являются два комплексных числа

$$\dot{X}_{1,2} = -\frac{\dot{A}}{2} \pm \sqrt{\frac{\dot{A}^2}{4} - \dot{B}}\,. \tag{37}$$

Вторая часть решений связана с условием

$$\dot{X}+\dot{X}e^{-i2\dot{k}\alpha_X}+\dot{A}=\dot{0}\,. \tag{38}$$

Рассмотрим эти решения для квадриплексных чисел и кватернионов.

Квадриплексные числа $(\dot{k}=\dot{0})$. В этом случае из уравнения (38) получаем $\dot{X}=-\dfrac{\dot{A}}{2}$, а из уравнения (35) $\dot{Y}_{1,2}=\pm\sqrt{-\dfrac{\dot{A}^2}{4}+\dot{B}}$. Таким образом, квадратное уравнение с комплексными коэффициентами наряду с двумя комплексными решениями (37) имеет два квадриплексных решения

$$\ddot{X}_{1,2}=-\frac{\dot{A}}{2}\pm\left(\sqrt{-\frac{\dot{A}^2}{4}+\dot{B}}\right)j\,. \tag{39}$$

Кватернионы $(\dot{k}=\dot{1})$. Для кватернионов уравнение (38) преобразуется к виду

$$\dot{X}+\hat{X}+\dot{A}=\dot{0}\,. \tag{40}$$

Решение уравнения (40) требует, чтобы коэффициент $\dot{A}$ был действительным числом. Следовательно, при комплексном значении $\dot{A}$ кватернионы имеют только два комплексных решения (37), что вполне объяснимо, так как кватернионы являются единственным расширением поля комплексных чисел и, следовательно, не могут давать дополнительных решений. Если же рассматривать коэффициент $\dot{A}$ как действительный $(\dot{A}=A'+0i)$, то в этом случае $X'=-\dfrac{A'}{2}$, а из (35) следует, что коэффициент $\dot{B}$ также должен быть действительным. В результате приходим к квадратному уравнению с действительными коэффициентами, для которого значения остальных составляющих кватерниона определяются соотношением

$$X''^2+Y'^2+Y''^2=-\frac{A'^2}{4}+B'\,. \tag{41}$$

Поскольку левая часть уравнения (41) является неотрицательным числом, то при отрицательном значении правой части, что соответствует двум действительным корням анализируемого квадратного уравнения с действительными коэффициентами A', B', кватернионных решений также не существует. В данном случае можно говорить только о бикватернионных решениях, так как бикватернионы по существу являются кватернионами с комплексными составляющими. Если же правая часть уравнения является положительной, то квадратное уравнение с действительными коэффициентами имеет бесконечное множество кватернионных решений, что обусловлено неоднозначностью кватернионов с точки зрения их вырождения в комплексные числа.

Выводы

1. В задачах математического моделирования могут использоваться гиперкомплексные числовые системы, представляющие собой элементы множества числовых систем, описываемого параметрической системой гиперкомплексных чисел.

2. Поскольку параметр гиперкомплексной числовой системы оказывает влияние на ее алгебраические свойства, то его выбор позволяет оптимальным образом адаптировать используемую числовую систему к решаемой задаче.

1. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Ю.Е. Бояринова, Я.А. Калиновский. — К.: Инфодрук, 2010. — 388 с.

2. *Клипков С.И.* О новом подходе к построению гиперкомплексных числовых систем ранга два над полем комплексных чисел / С.И. Клипков // Укр. Мат. Журн. — 2011. — **63**, № 1. — С. 130–139.

3. *Клипков С.И.* Использование гиперкомплексных числовых систем для математического моделирования предельных режимов электрических систем / С. И. Клипков // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2012. — Т. 14, № 4. — С. 11–23.

4. *Расчет* потокораспределения методом Ньютона-Рафсона на основе обобщенной плоскости комплексных чисел / Chiba Fumihiko, Tanaka Eiichi, Nishiya Ken-ichi, Hasegawa Jun // Дэнки раккай ромбунси. В = Trans. Inst. Elec. Eng. Jap. B. — 1991. — **111**, № 3. — С. 252–258.

Поступила в редакцию 27.02.2013