УДК 004.94

Я. А. Калиновский[1], **Ю. Е. Бояринова**[1,2]
[1]Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина
[2]Национальный технический университет Украины «КПИ»
Проспект Победы, 37, 03113 Киев, Украина

Исследование эффективности использования представлений функций гиперкомплексного переменного

Исследовано уменьшение объема вычислений при использовании представлений функций гиперкомплексного переменного, таких как экспонента, тригонометрические и гиперболические функции, по сравнению с непосредственным их вычислением с помощью суммирования бесконечных степенных рядов.

***Ключевые слова**: гиперкомплексная числовая система, экспоненциальная функция, тригонометрическая функция, гиперболическая функция, объем вычислений.*

Введение

Расширение областей применения гиперкомплексных числовых систем (ГЧС) требует повышения эффективности алгоритмов вычислений при их использовании. При построении математических моделей различных процессов часто используются такие нелинейности как экспонента, тригонометрические и гиперболические функции, вычисления значений которых в области ГЧС могут представлять серьезные трудности. Как показали исследования авторов [1, 2], одним из эффективных методов снижения объемов вычислений является переход от непосредственного вычисления вышеназванных функций с помощью суммирования бесконечных степенных рядов к их представлениям через гиперкомплексные функции.

Один из создателей гиперкомплексных чисел В.Р. Гамильтон первым предложил конструктивное определение некоторых трансцендентных функций от гиперкомплексного переменного. В работе [3] они определяются как суммы степенных рядов подобно функциям от вещественного переменного. Тогда представления экспоненты, тригонометрических и гиперболических функций в ГЧС будут иметь следующий вид:

1) экспонента:

$$Exp(M)=\sum_{S=0}^{\infty}\frac{M^S}{S!};$$

2) тригонометрические синус и косинус:

$$\mathrm{Sin}(M)=\sum_{S=0}^{\infty}(-1)^S\frac{M^{2S+1}}{(2S+1)!},\quad \mathrm{Cos}(M)=\sum_{S=0}^{\infty}(-1)^s\frac{M^{2S}}{(2S)!};$$

3) гиперболические синус и косинус:

$$Sh(M)=\sum_{S=0}^{\infty}\frac{M^{2S+1}}{(2S+1)!},\ \ Ch(M)=\sum_{S=0}^{\infty}(-1)^s\frac{M^{2S}}{(2S)!}.$$

Во всех этих формулах $M=\sum_{i=1}^{n}m_ie_i$ — гиперкомплексное число, принадлежащее некоторой ГЧС $\boldsymbol{\Gamma}$ размерности n с базисом $e_1,...,e_n$.

Предполагается, что по определению $M^0=\varepsilon$, где ε — единичный элемент гиперкомплексной системы $\boldsymbol{\Gamma}$.

Вычисления сумм бесконечных сходящихся рядов громоздки и требуют большого объема вычислений. Кроме того, они непригодны для аналитических построений. Поэтому здесь используются представления этих сумм рядами в виде гиперкомплексных функций.

Гиперкомплексной функцией $F(X)$ от гиперкомплексного аргумента $X=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\in\boldsymbol{\Gamma}$ называют функцию вида

$$F(X)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x_1,x_2,...,x_n)\cdot e_i,$$

где $f_i(x_1,x_2,...,x_n)$, $i=1,...,n$ — вещественные функции от n вещественных аргументов, для вычисления значений которых существуют эффективные алгоритмы.

Первым примером такого представления является широко известная формула Эйлера: $Exp(x+iy)=e^x(\cos x+i\sin y)$.

Во многих работах проведены исследования по построению представлений функций от кватерниона. Для этого используются разные методы, которые базируются на свойствах кватернионов [4–11].

В работах [12, 13] построены представления логарифмической, тригонометрических и гиперболических функций в коммутативных ГЧС третьей и четвертой размерностей путем преобразования степенного ряда с использованием разных искусственных методов.

Авторами данной работы предложен универсальный метод построения представлений экспонент, тригонометрических и гиперболических функций от гиперкомплексных переменных для коммутативных и некоммутативных ГЧС конечных размерностей [1, 2].

Целью данной работы является оценка эффективности применения представлений нелинейных функций в ГЧС по сравнению с непосредственным их вычислением с помощью суммирования бесконечных степенных рядов. Эта оценка проводится по измерению времени вычисления двумя способами: расчетами с помощью степенных рядов либо представлений гиперкомплексных функций. Эти расчеты производятся для большого количества различных ГЧС.

Методика исследования

Для проведения исследования из работ [1, 2] были отобраны 12 ГЧС размерности два, три и четыре. Там же приведены названия, обозначения и таблицы Кели этих ГЧС. Так как эти сведения занимают много места, то в данной статье они не приводятся. Здесь же приведем только примеры представлений нелинейностей в некоторых ГЧС.

1. Представление экспоненты в системе дуальных чисел $\boldsymbol{D}$ размерности 2, таблица Кели которой имеет вид:

	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	0

Представление экспоненты в этой ГЧС:

$$Exp(M) = e^{m_1}(e_1 + m_2 e_2).$$

2. Представление тригонометрического синуса в системе триплексных чисел Люша $\boldsymbol{T}$ размерности 3, таблица Кели, которой имеет вид:

	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	$(e_3 - e_1)/2$	$-e_2$
e_3	e_3	$-e_2$	e_1

$$Sin(M) = \frac{1}{2}(\sin(m_1 + m_3) + \sin(m_1 - m_3)chm_2)e_1 + \cos(m_1 - m_3)shm_2 e_2 +$$
$$+\frac{1}{2}(\sin(m_1 + m_3) - \sin(m_1 - m_3)chm_2)e_3.$$

3. Представление гиперболического косинуса в ГЧС $\boldsymbol{\Gamma}_{46}$ размерности 4, таблица Кели которой следующая:

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_4	e_4	0
e_3	e_3	e_4	0	0
e_4	e_4	0	0	0

$$Ch(M) = chm_1 \cdot e_1 + m_2 shm_1 \cdot e_2 + (m_3 shm_1 + \frac{1}{2} m_2^2 chm_1) e_3 + (m_4 shm_1 + m_2 m_3 chm_1 + \frac{1}{6} m_2^3 shm_1) e_4 .$$

4. Представление экспоненты в системе квадриплексных чисел $\boldsymbol{K}$ размерности 4:

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	e_4	$-e_1$	$-e_2$
e_4	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1

$$\begin{aligned} Exp(M) = \frac{1}{2} e^{m_1} ((e^{-m_4} \cos(m_2 + m_3) + e^{m_4} \cos(-m_2 + m_3)) e_1 + \\ + (e^{-m_4} \sin(m_2 + m_3) - e^{m_4} \sin(-m_2 + m_3)) e_2 + \\ + (e^{-m_4} \sin(m_2 + m_3) + e^{m_4} \sin(-m_2 + m_3)) e_3 + \\ + (-e^{-m_4} \cos(m_2 + m_3) + e^{m_4} \cos(-m_2 + m_3)) e_4). \end{aligned}$$

Для каждой из отобранных ГЧС было определено время вычисления значения экспоненты и одной из тригонометрических или гиперболических функций двумя способами: с помощью степенных рядов и с помощью представлений этих функций для одного и того же гиперкомплексного аргумента. Вычисления производились с помощью программ, выполненных в среде Maple.

Maple — это пакет для аналитический вычислений, содержащий несколько тысяч команд, которые позволяют решать задачи алгебры, геометрии, математического анализа, статистики, математической физики. Основными объектами пакета являются формулы, состоящие из математических символов, и выполняемые над ними действия. Это означает, что пользователи могут вводить выражения в традиционной математической, то есть символьной форме.

Ядро системы Maple написано на языке C и реализует язык Maple. Основная часть функциональности системы реализована в десятках различных библиотек, большинство из которых написано на самом языке Maple. Символьные выражения хранятся в памяти в виде ориентированного ациклического графа. Стандартный интерфейс реализован на языке Java, и при этом существуют возможности его расширения.

Для построения моделей с использованием гиперкомплексного представления данных в ИПРИ НАН Украин разработан пакет процедур для выполнения символьных и численных операций в ГЧС [14]. Использование символьных выражений в Maple позволяет создавать более компактные и эффективные алгоритмы для работы с гиперкомплексными числами.

Пакет процедур использует гиперкомплексное представление чисел и представление таблицы умножения гиперкомплексной числовой системы в общем виде. Так, основные процедуры библиотеки могут быть использованы для ГЧС любых размерностей. Вычисления могут проводиться как в символьном, так и в численном виде, в зависимости от вида заданных коэффициентов.

Ниже приведен пример программы в системе аналитических вычислений Maple для определения времени вычисления тригонометрического синуса в системе квадриплексных чисел $\boldsymbol{K}$ двумя способами: с помощью полученных представлений и с помощью вычисления суммы ряда. Каждая строка программы пронумерована (и в дальнейшем будем называть оператор № … для объяснения вычислений).

```
1. restart.
2. read("D:\\Triplex\\HNS_lib.m").
3. T1:=HNS_lib[Tabl_4order](1,15)
```

$$\boldsymbol{The\_table\_N = 15} \quad \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ E_2 & -E_1 & E_4 & -E_3 \\ E_3 & E_4 & -E_1 & -E_2 \\ E_4 & -E_3 & -E_2 & E_1 \end{bmatrix}.$$

```
4. A:=a[1]*E[1]+a[2]*E[2]+a[3]*E[3]+a[4]*E[4].
5.  f1:=(1/2)*((-sin(a[1]   a[4])*cosh(a[2]+a[3])+sin(a[1]+a[4])*
*cosh(-a[3]+a[2]))*E[1]+((cos(a[1]-a[4])*sinh(a[2]+a[3])+
+cos(a[1]+a[4])*sinh(-a[3]+a[2]))*E[2]+((cos(a[1]-a[4])*
*sinh(a[2]+a[3])-cos(a[1]+a[4])*sinh(-a[3]+a[2]))*E[3]-
-((sin(a[1]-a[4])*cosh(a[2]+a[3])+sin(a[1]+a[4])*cosh(-a[3]+
+a[2])))*E[4])));
```

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f1} := {} & \frac{1}{2}\left(\sin\left(-a_1 + a_4\right)\cosh\left(a_2 + a_3\right) + \sin\left(a_1 + a_4\right)\cosh\left(a_3 \right.\right. \\ & \left.\left. - a_2\right)\right) E_1 + \frac{1}{2}\left(\cos\left(-a_1 + a_4\right)\sinh\left(a_2 + a_3\right) - \cos\left(a_1 \right.\right. \\ & \left.\left. + a_4\right)\sinh\left(a_3 - a_2\right)\right) E_2 + \frac{1}{2}\left(\cos\left(-a_1 + a_4\right)\sinh\left(a_2 \right.\right. \\ & \left.\left. + a_3\right) + \cos\left(a_1 + a_4\right)\sinh\left(a_3 - a_2\right)\right) E_3 - \frac{1}{2}\left(-\sin\left(-a_1 \right.\right. \\ & \left.\left. + a_4\right)\cosh\left(a_2 + a_3\right) + \sin\left(a_1 + a_4\right)\cosh\left(a_3 - a_2\right)\right) E_4 \end{aligned}$$

```
6. a[1]:=1.;a[2]:=1.;a[3]:=1;a[4]:=1.
7. A;
```

$$1.\ E_1 + 1.\ E_2 + E_3 + 1.\ E_4$$

8.
```
for k from 1  to 10000 do  f[1];  end do: f[1];
```

$$0.4546487134\ E_1 + 1.813430204\ E_2 + 1.813430204\ E_3 - 0.4546487134\ E_4$$

9.
```
for m from 1 to 1000 do sum1:=A; mul1:=A; A2:=HNS_lib[Mult](A,A,T1);
    for k from 1 to 10 do mul1:=(HNS_lib[Mult](mul1,A2,T1))/ /((2*k)*(2*k+1)); sum1:=sum1+mul1*(-1)^k;  end do: end do:sum1;
```

$$0.4546487136\ E_1 + 1.813430203\ E_2 + 1.813430203\ E_3 + 0.4546487136\ E_4$$

Оператор № 2 осуществляет вызов пакета процедур для выполнения символьных и численных операций в ГЧС, имя которого — **HNS_lib.m**, а оператор № 3 вызывает таблицу Кели для квадриплексных чисел — **HNS_lib[Tabl_4order](1,15)**. Оператор № 4 определяет вид квадриплексного числа в символьной форме, а оператор № 6 присваивает конкретное значение квадриплексному числу $A = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$, тригонометрический синус от которого будет вычисляться. Оператор № 5 выводит формулу представления тригонометрического синуса в системе квадриплексных чисел $\boldsymbol{K}$. Оператор № 8 в цикле длиной 10000 вычисляет значение тригонометрического синуса от A по формуле представления. Длина цикла определяется так, чтобы суммарное время работы цикла было удобным для фиксации.

Система Maple «удобна» в данном случае и тем, что в ней предусмотрено автоматическое определение времени работы операторов, расположенных в одной секции. Делением этого времени на длину цикла и определяется среднее время вычисления тригонометрического синуса по формуле представления. Здесь же определяется результат вычисления

Оператор № 9 в цикле длиной 1000 вычисляет значение тригонометрического синуса от A по сумме степенного ряда. Длина внутреннего цикла — это количество вычисляемых членов степенного ряда, которое определяется экспериментально так, чтобы точности вычислений в обоих случаях совпадали. В этом операторе дважды используется одна из процедур пакета **HNS_lib.m** — процедура **HNS_lib[Mult](A,A,T1)** умножения двух квадриплексных чисел A и A в соответствии с таблицей Кели $T1$. Время вычисления определяется, как и в первом случае, а результаты совпадают.

Результаты вычислительного эксперимента

Результаты эксперимента представлены в табл. 1 и 2. Они получены с помощью программного обеспечения, разработанного в системе символьного вычисления MAPLE; компьютер Pentium IV, 2,8 ГГц.

Таблица 1. Сравнение времени вычисления экспоненты с помощью представлений и вычисления суммы ряда для разных ГЧС

№ ГЧС	Имя ГЧС	Размерность ГЧС	Время вычисления по представлениям, $t_{форм}$, с	Время вычисления с помощью ряда, $t_{ряд}$, с	$t_{ряд} / t_{форм}$
1	$\boldsymbol{C}$	2	$7{,}1 \cdot 10^{-5}$	$6{,}0 \cdot 10^{-3}$	~84
2	$\boldsymbol{D}$	2	$3{,}3 \cdot 10^{-5}$	$4{,}0 \cdot 10^{-3}$	~121
3	$\boldsymbol{W}$	2	$7{,}1 \cdot 10^{-5}$	$5{,}0 \cdot 10^{-3}$	~70
4	$\boldsymbol{\Gamma}_{31}$	3	$3{,}8 \cdot 10^{-5}$	$8{,}0 \cdot 10^{-3}$	~210
5	$\boldsymbol{\Gamma}_{32}$	3	$5{,}5 \cdot 10^{-5}$	$10{,}0 \cdot 10^{-3}$	~181
6	$\boldsymbol{\Gamma}_{33}$	3	$21{,}5 \cdot 10^{-5}$	$14{,}0 \cdot 10^{-3}$	~65
7	$\boldsymbol{\Gamma}_{41}$	4	$16{,}5 \cdot 10^{-5}$	$24{,}0 \cdot 10^{-3}$	~84
8	$\boldsymbol{\Gamma}_{42}$	4	$4{,}0 \cdot 10^{-5}$	$15{,}0 \cdot 10^{-3}$	~145
9	$\boldsymbol{\Gamma}_{43}$	4	$6{,}1 \cdot 10^{-5}$	$18{,}0 \cdot 10^{-3}$	~300
10	$\boldsymbol{\Gamma}_{44}$	4	$7{,}0 \cdot 10^{-5}$	$16{,}0 \cdot 10^{-3}$	~228
11	$\boldsymbol{\Gamma}_{46}$	4	$7{,}9 \cdot 10^{-5}$	$19{,}0 \cdot 10^{-3}$	~240
12	$\boldsymbol{K}$	4	$36{,}0 \cdot 10^{-5}$	$18{,}5 \cdot 10^{-3}$	~51

Таблица 2. Сравнение времени вычисления тригонометрических и гиперболических функций с помощью представлений и вычисления суммы ряда для разных ГЧС

№ ГЧС	Имя ГЧС	Размерность ГЧС	Время вычисления по представлениям, $t_{форм}$, с	Время вычисления с помощью ряда, $t_{ряд}$, с	$t_{ряд} / t_{форм}$
1	$\boldsymbol{C}$	2	$8{,}1 \cdot 10^{-5}$	$4{,}0 \cdot 10^{-3}$	~50
2	$\boldsymbol{D}$	2	$4{,}7 \cdot 10^{-5}$	$3{,}0 \cdot 10^{-3}$	~64
3	$\boldsymbol{W}$	2	$4{,}8 \cdot 10^{-5}$	$3{,}0 \cdot 10^{-3}$	~62
4	$\boldsymbol{\Gamma}_{31}$	3	$6{,}6 \cdot 10^{-5}$	$5{,}0 \cdot 10^{-3}$	~76
5	$\boldsymbol{\Gamma}_{32}$	3	$10{,}0 \cdot 10^{-5}$	$6{,}0 \cdot 10^{-3}$	~60
6	$\boldsymbol{\Gamma}_{33}$	3	$40{,}9 \cdot 10^{-5}$	$10{,}1 \cdot 10^{-3}$	~25
7	$\boldsymbol{\Gamma}_{41}$	4	$24{,}0 \cdot 10^{-5}$	$10{,}1 \cdot 10^{-3}$	~42
8	$\boldsymbol{\Gamma}_{42}$	4	$9{,}4 \cdot 10^{-5}$	$9{,}1 \cdot 10^{-3}$	~97
9	$\boldsymbol{\Gamma}_{43}$	4	$12{,}4 \cdot 10^{-5}$	$11{,}1 \cdot 10^{-3}$	~90
10	$\boldsymbol{\Gamma}_{44}$	4	$9{,}5 \cdot 10^{-5}$	$7{,}5 \cdot 10^{-3}$	~79
11	$\boldsymbol{\Gamma}_{46}$	4	$12{,}5 \cdot 10^{-5}$	$10{,}2 \cdot 10^{-3}$	~82
12	$\boldsymbol{K}$	4	$35{,}0 \cdot 10^{-5}$	$13{,}7 \cdot 10^{-3}$	~39

Как видно из табл. 1 и 2, время вычисления нелинейностей от гиперкомплексного аргумента при использовании формул представления сокращается в 25–300 раз по сравнению с использованием степенных рядов.

При вычислении с использованием степенных рядов в программе вычислений ряд операторов был оптимизирован. Так, например, в операторе № 9 члены ряда вычисляются рекуррентно:

$$R_k = R_{k-1} \frac{A^2}{2k(2k+1)},$$

что эффективнее полного вычисления члена ряда. В то же время при вычислении по формуле представления такой оптимизации нет. Так в операторе № 8 вычисления тригонометрических и гиперболических функций от одного и того же вещественного аргумента повторяются. Если использовать промежуточные запоминания, то ускорение вычислений будет еще большим.

Выводы

Полученные в результате вычислительного эксперимента данные позволяют сделать вывод о том, что использование при математическом моделировании с применением гиперкомплексных чисел представлений нелинейностей позволяет существенно сократить время вычислений.

1. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова — К.: НАН України, Ін-т проблем реєстрації інформації, 2010. — 389 с.

2. *Каліновський Я.О.* Методи комп'ютерного моделювання та обчислень з використанням гіперкомплексних числових систем : дис. … д-ра техн. наук: 01.05.02 / Каліновський Яків Олександрович; Ін-т пробл. реєстрації інформації НАН України. — К., 2007. — 417 с. — Бібліогр. — С. 323–348.

3. *Hamilton W.R.* Researches respecting Quaternions: First Series / W.R. Hamilton // Transactions of the Royal Irish Academy. —1848. — Vol. 21. — Part 1. — P. 199–296.

4. *Kähler U.* Die Anwendung der hyperkomplexen Funktionentheorie auf die Losung partieller Differentialgleichungen [Электронный ресурс] / U. Kähler. — Режим доступа: www.tu-chemnitz.de /mathematik/ prom_habil/promint.pdf (1998)

5. *Brackx F.* The Exponential Function of a Quaternion Variable / F. Brackx // Applicable Analysis. — 1979. — Vol. 8. — P. 265–276.

6. *Scheicher K.* Elementary Inequalities in Hypercomplex Numbers / K. Scheicher, R.F. Tichy, K.W. Tomantschger // Anzeiger. — 1997. — Abt. II. — No. 134. — P. 3–10.

7. *Holin H.* The Quaternionic Exponential and beyond [Электронный ре-сурс] / H. Holin. — Режим доступа: http://www.bigfoot.com/~Hubert.Holin

8. *Brackx F.* The Exponential Function of a Quaternion Variable / F. Brackx // Applicable Analysis. — 1979. — Vol. 8. — P. 265–276.

9. *Eberly D.* Quaternion Algebra and Calculus [Электронный ресурс] / D. Eberly. — Режим доступа: http://www.magic-software.com (1999)

10. *Klingener F.* Summary of Dual and Quaternion Mathematics for Kinematics [Электронный ресурс] / F. Klingener. — Режим доступа: www.BrockEng.com/VMech/Quaternions/kinemath.pdf. P. 23 (2001).

11. *Ude A.* Filtering in a Unit Quaternion Space for Model-Based Object Tracking / [Электронный ресурс] / Ude A. — Режим доступа: www.cns.atr.jp/~aude/publications/ras99.pdf

12. *Liefke H.* Quaternion Calculus for Modeling Rotations in 3D Space / [Электронный ресурс] / Liefke H. — Режим доступа: www.liefke.com/hartmut(1998)

13. *Olariu S.* Complex Numbers in Three Dimensions / [Электронный ресурс] / S. Olariu. — Режим доступа: arXiv:math/0008120 [math.CV], v1, 16 Aug (2000)

14. *Olariu S.* Commutative Complex Numbers in Four Dimensions / [Электронный ресурс] / S. Olariu. — Режим доступа: arXiv:math./0008119 [math.CV], v1, 16 Aug (2000)

15. *Алгоритмічно-програмний* інструментарій аналітичних обчислень над гіперкомплексними числами в системі комп'ютерної математики MAPLE / М.В. Синьков, Ю.Є. Боярінова, Я.О. Каліновський [та ін.] // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2005. — Т. 7, № 2. — С. 18–24.

Поступила в редакцию 12.05.2016