УДК 004.94

Я. А. Калиновский[1], Ю. Е. Бояринова[1,2],
Т. С. Синькова[1], А. С. Сукало[1]
[1]Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина
[2]Национальный технический университет Украины «КПИ»
Проспект Победы, 37, 03056 Киев, Украина

Разработка представлений гиперболических и тригонометрических нелинейностей в системе обобщенных кватернионов

Рассмотрен процесс математического моделирования представлений гиперболических и тригонометрических нелинейностей в гиперкомплексной числовой системе обобщенных кватернионов с помощью метода ассоциированной системы дифференциальных уравнений. Рассмотрены некоторые свойства этих представлений и их связь с представлениями нелинейностей в конкретных некоммутативных гиперкомплексных числовых системах размерности четыре.

***Ключевые слова**: гиперкомплексная числовая система, базис, гиперкомплексная функция, гиперболическая функция, тригонометрическая функция, обобщенные кватернионы.*

Введение

Разработанный авторами метод ассоциированной системы дифференциальных уравнений [1–3] позволяет получить представления нелинейностей, как в коммутативных, так и некоммутативных гиперкомплексных числовых системах. В работе [4] были построены представления экспоненциальной и логарифмической функций от обобщенного кватерниона.

Обобщенные кватернионы были введены К. Геделем в 1949 году для представления пространственно-временных групп. В работе [5] он представил решения уравнений Эйнштейна гравитационного поля с помощью обобщенных кватернионов.

В данной работе строятся представления гиперболических и тригонометрических функций от обобщенных кватернионов.

Обобщенный кватернион имеет вид

$$A = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 , \quad (1)$$

где a_i — действительные числа, а $e_i, i = 2,..,4$ — базисные элементы, удовлетворяющие следующей таблице Кели:

$$\begin{array}{|c|cccc|}
\hline
H_{\alpha\beta} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\
\hline
e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\
e_2 & e_2 & -\alpha e_1 & e_4 & -\alpha e_3 \\
e_3 & e_3 & -e_4 & -\beta e_1 & \beta e_2 \\
e_4 & e_4 & \alpha e_3 & -\beta e_2 & -\alpha\beta e_1 \\
\hline
\end{array}\,. \qquad (2)$$

Здесь α , $\beta \in R$.

Как показано в [1–3] компонентами представлений гиперболических и тригонометрических функций от обобщенных кватернионов будут компоненты частных решений определяющих гиперкомплексных линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2}{dt^2} X(t) = \pm A^2 \cdot X(t) \qquad (3)$$

при соответствующих начальных условиях. Если перед правой частью уравнения (3) стоит знак «$+$», то оно определяет гиперболические функции, в противном случае — тригонометрические.

Разбивая уравнение (3) на компоненты при одинаковых базисных элементах, получим систему из четырех линейных дифференциальных уравнений от вещественных аргументов с вещественными коэффициентами. Решение этой системы можно получить на основе теории систем линейных дифференциальных уравнений в зависимости от вида ее характеристических корней. При этом каждое частное решение системы будет компонентом при соответствующем базисном элементе решения уравнения (3), определяя тем самым соответствующую функцию от гиперкомплексной переменной.

Решения уравнения (3), которые определяются решениями системы из четырех линейных дифференциальных уравнений, будут иметь вид

$$X = X(t, C_1, C_2, ..., C_8)\,,$$

где $C_1, C_2, ..., C_8$ — произвольные постоянные интегрирования. Их можно определить, если они будут связаны системой из 8-ми уравнений, для чего необходимо знать значения соответствующих функций для двух конкретных значений обобщенного кватерниона.

Построение представлений гиперболических функций от обобщенного кватерниона

Если обобщенные кватернионы $X = \sum_{i=1}^{4} x_i(t) e_i$ и (1) подставить в определяющее уравнение (3) со знаком «$+$» перед правой частью, произвести умножения в соответствии с таблицей (2) и приравнять коэффициенты при одинаковых базисных элементах в левой и правой частях, то получим следующую систему из четырех линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2x_1(t)}{dt^2}=(a_1^2-\alpha a_2^2-\beta a_3^2-\alpha\beta a_4^2)x_1(t)-2\alpha a_1a_2x_2(t)-2\beta a_1a_3x_3(t)-2\alpha\beta a_1a_4x_4(t),\\
&\frac{d^2x_2(t)}{dt^2}=2a_1a_2x_1(t)+(a_1^2-\alpha a_2^2-\beta a_3^2-\alpha\beta a_4^2)x_2(t)-2\beta a_1a_4x_3(t)+2\beta a_1a_3x_4(t),\\
&\frac{d^2x_3(t)}{dt^2}=2a_1a_3x_1(t)+2\alpha a_1a_4x_2(t)+(a_1^2-\alpha a_2^2-\beta a_3^2-\alpha\beta a_4^2)x_3(t)-2\alpha a_1a_2x_4(t),\\
&\frac{d^2x_4(t)}{dt^2}=2a_1a_4x_1(t)-2a_1a_3x_2(t)+2a_1a_2x_3(t)+(a_1^2-\alpha a_2^2-\beta a_3^2-\alpha\beta a_4^2)x_4(t).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Характеристическое уравнение правой части имеет четыре двойных корня:

$$\lambda_1=a_1+i\cdot\sqrt{\Delta};\ \ \lambda_2=a_1-i\cdot\sqrt{\Delta};\ \ \lambda_3=-a_1+i\cdot\sqrt{\Delta};\ \ \lambda_4=-a_1-i\cdot\sqrt{\Delta}\,,\ i^2=-1. \tag{5}$$

Полное решение $X(t)$ системы (4) состоит из четырех компонентов $x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t),\ x_4(t)$, каждый из которых состоит из четырех частных решений вида:

$$x_k(t)=\sum_{s=1}^{4}x_{ks}(t)=\sum_{s=1}^{4}(C_{k,2s-1}+C_{k,2s}t)e^{\lambda_s t}. \tag{6}$$

Таким образом, всего решения системы (4) имеют 32 произвольных постоянных. Из них 24 — зависимые или нулевые, а остальные 8 являются свободными, значения которых можно найти с помощью двух начальных значений. Для их построения учтем, что гиперболический синус может быть представлен степенным рядом

$$Sh(At)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(At)^{2i+1}}{(2i+1)!}. \tag{7}$$

Как показано в [1–3] функция вида (7) удовлетворяет определяющему уравнению (3) для гиперболических функций. Из (7) следуют следующие начальные условия:

1) $Sh(0)=0$;

2) так как

$$(a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4)^2=-(\alpha a_2^2+\beta a_3^2+\alpha\beta a_4^2)=-\Delta, \tag{8}$$

где

$$\Delta=\alpha a_2^2+\beta a_3^2+\alpha\beta a_4^2, \tag{9}$$

то при $t=1$ $Sh(a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4)=\dfrac{a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4}{\sqrt{|\Delta|}}\sin(\sqrt{|\Delta|})$.

Применение к (4) обычной процедуры решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений дает следующие значения произвольных постоянных:

1) $C_{k,2s}=0,\ \ k,s=1,...,4$;

2) $C_{11}=C_{13}=1;\ \ C_{15}=C_{17}=-1$;

3) $C_{k1}=C_{k7}=\dfrac{a_k}{2\sqrt{|\Delta|}};\ \ C_{k3}=C_{k5}=-\dfrac{a_k}{2\sqrt{|\Delta|}}\ ;\quad k=2,3,4$.

Подстановка значений произвольных постоянных в решения (6) и упрощающие преобразования дают следующее представление гиперболического синуса от обобщенного кватерниона:

$$Sh(At)=\frac{1}{2}sha_1t\left[(e^{i\sqrt{|\Delta|}t}+e^{-i\sqrt{|\Delta|}t})e_1+\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}(e^{i\sqrt{|\Delta|}t}-e^{-i\sqrt{|\Delta|}t})(a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4)\right]. \quad (10)$$

На рис. 1 представлены графики зависимости от времени амплитуд компонентов гиперболического синуса обобщенного кватерниона с параметрами $\alpha=0{,}1$ и $\beta=1$ такого вида:

$$A=0{,}1\sin(\pi t-\frac{\pi}{5})\cdot e_1+\sin(2\pi t-\frac{\pi}{6})\cdot e_2+\sin 2\pi t\cdot e_3+\sin(2\pi t+\frac{\pi}{6})\cdot e_4\,. \quad (11)$$

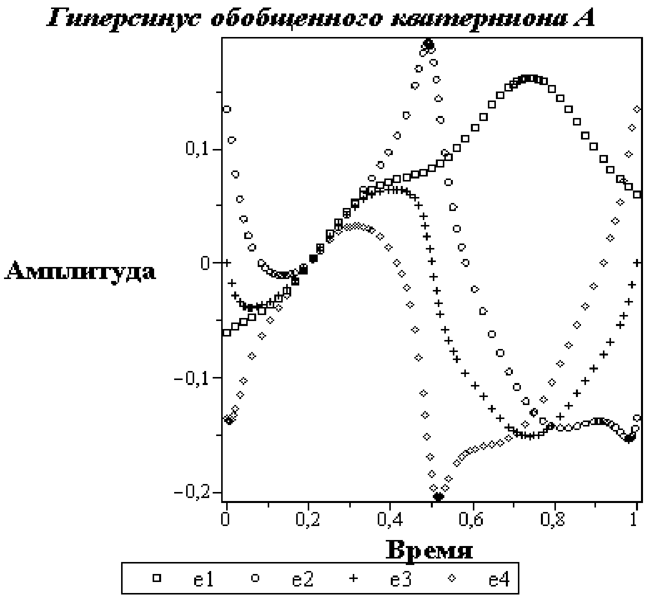

Рис. 1

Для построения представления следует учесть, что определяющее уравнение такое же, как и для синуса, а поэтому корни характеристического уравнения (5) правой части ассоциированной системы дифференциальных уравнений такие же, и частные решения также будут иметь вид (6). Для определения начальных условий воспользуемся степенным рядом для гиперболического косинуса

$$Ch(At) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^{2i}}{(2i)!},$$

откуда начальные условия с учетом (8), (9) будут следующие:

1) $Ch(0) = 1$;

2) при $t = 1$ $Ch(a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4) = \sin(\sqrt{|\Delta|})$.

Применение к (4) обычной процедуры решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений дает следующие значения произвольных постоянных:

1) $C_{k,2s} = 0,\ \ k, s = 1,...,4$;

2) $C_{11} = C_{13} = C_{15} = C_{17} = 1$;

3) $C_{k1} = C_{k5} = \dfrac{a_k}{2\sqrt{|\Delta|}}$; $C_{k3} = C_{k7} = -\dfrac{a_k}{2\sqrt{|\Delta|}}$; $k = 2,3,4$.

Подстановка значений произвольных постоянных в решения (6) и упрощающие преобразования дают следующее представление гиперболического синуса от обобщенного кватерниона:

$$Ch(At) = \frac{1}{2} cha_1t \left[(e^{i\sqrt{|\Delta|}t} + e^{-i\sqrt{|\Delta|}t})e_1 + \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} (e^{i\sqrt{|\Delta|}t} - e^{-i\sqrt{|\Delta|}t})(a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4) \right]. \quad (12)$$

На рис. 2 представлены графики зависимости от времени амплитуд компонентов гиперболического косинуса обобщенного кватерниона (10).

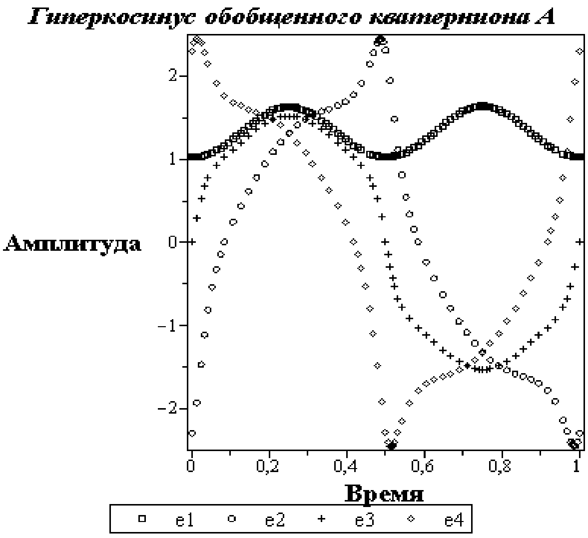

Рис. 2

Построение представлений тригонометрических функций от обобщенного кватерниона

Представления тригонометрических функций от обобщенного кватерниона строятся с помощью определяющего уравнения (1), перед правой частью которого стоит знак «–». Поэтому ассоциированная система дифференциальных уравнений несколько отличается от (4):

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} &= -(a_1^2-\alpha a_2^2-\beta a_3^2-\alpha\beta a_4^2)x_1(t)+2\alpha a_1a_2x_2(t)+2\beta a_1a_3x_3(t)+2\alpha\beta a_1a_4x_4(t),\\
\frac{d^2x_2(t)}{dt^2} &= -2a_1a_2x_1(t)-(a_1^2-\alpha a_2^2-\beta a_3^2-\alpha\beta a_4^2)x_2(t)+2\beta a_1a_4x_3(t)-2\beta a_1a_3x_4(t),\\
\frac{d^2x_3(t)}{dt^2} &= -2a_1a_3x_1(t)-2\alpha a_1a_4x_2(t)-(a_1^2-\alpha a_2^2-\beta a_3^2-\alpha\beta a_4^2)x_3(t)+2\alpha a_1a_2x_4(t),\\
\frac{d^2x_4(t)}{dt^2} &= -2a_1a_4x_1(t)+2a_1a_3x_2(t)-2a_1a_2x_3(t)-(a_1^2-\alpha a_2^2-\beta a_3^2-\alpha\beta a_4^2)x_4(t).
\end{aligned} \tag{13}$$

Характеристическое уравнение правой части имеет четыре двойных корня:

$$\lambda_1=\sqrt{\Delta}+i\cdot a_1;\;\; \lambda_2=-\sqrt{\Delta}-i\cdot a_1;\;\; \lambda_3=\sqrt{\Delta}-i\cdot a_1;\;\; \lambda_4=-\sqrt{\Delta}+i\cdot a_1,\; i^2=-1.$$

Частные решения системы (13) имеют вид (6).

Полное решение состоит из четырех компонентов $x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t),\ x_4(t)$, каждый из которых состоит из четырех частных решений вида:

$$x_k(t)=\sum_{s=1}^{4}x_{ks}(t)=\sum_{s=1}^{4}(C_{k,2s-1}+C_{k,2s}t)e^{\lambda_s t}. \tag{14}$$

Для определения начальных условий воспользуемся степенным рядом для тригонометрического синуса:

$$\mathrm{Sin}(At)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{(At)^{2i+1}}{(2i+1)!}.$$

Определяем начальные условия:

1) $\mathrm{Sin}(0)=0$;

2) при $t=1$ $\mathrm{Sin}(a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4)=\dfrac{a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4}{\sqrt{|\Delta|}}sh(\sqrt{|\Delta|})$.

Применение к (13) обычной процедуры решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, дает следующие значения произвольных постоянных:

1) $C_{k,2s}=0,\;\; k,s=1,...,4$;

2) $C_{11}=C_{15}=1;\;\; C_{13}=C_{17}=-1$;

3) $C_{k,2s-1} = \dfrac{a_k}{2\sqrt{|\Delta|}}$, $k = 2,3,4$; $s = 1,...,4$.

Подстановка значений произвольных постоянных в решения (6) и упрощающие преобразования дают представление синуса от обобщенного кватерниона:

$$\mathrm{Sin}(At) = \frac{1}{2}\left[\sin a_1 t(e^{\sqrt{|\Delta|}t} + e^{-\sqrt{|\Delta|}t})e_1 + \frac{\cos a_1 t}{\sqrt{|\Delta|}}(e^{\sqrt{|\Delta|}t} - e^{-\sqrt{|\Delta|}t})(a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4)\right]. \quad (15)$$

На рис. 3 показаны графики зависимости от времени амплитуд компонентов тригонометрического синуса обобщенного кватерниона.

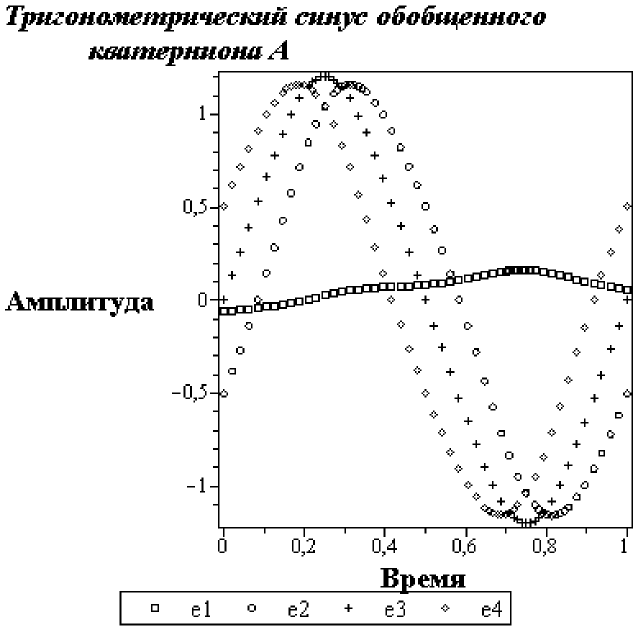

Рис. 3

Построение представления тригонометрического косинуса от обобщенного кватерниона отличается от построения представления синуса только начальными условиями:

1) $\mathrm{Cos}(0) = 1$;

2) при $t = 1$ $\mathrm{Cos}(a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4) = ch(\sqrt{|\Delta|})$.

Применение к (13) обычной процедуры решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений дает следующие значения произвольных постоянных:

1) $C_{k,2s} = 0$, $k, s = 1,...,4$;

2) $C_{1,2s-1} = 1$; $s = 1,...,4$;

3) $C_{k1} = C_{k5} = \dfrac{a_k}{2\sqrt{|\Delta|}}$, $C_{k3} = C_{k7} = -\dfrac{a_k}{2\sqrt{|\Delta|}}$; $k = 2,3,4$.

Подстановка значений произвольных постоянных в решения (6) и упрощающие преобразования дают следующее представление косинуса от обобщенного кватерниона:

$$\mathrm{Cos}(At)=\frac{1}{2}\left[\cos a_1 t(e^{\sqrt{|\Delta|}t}+e^{-\sqrt{|\Delta|}t})e_1+\frac{\sin a_1 t}{\sqrt{|\Delta|}}(e^{\sqrt{|\Delta|}t}-e^{-\sqrt{|\Delta|}t})(a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4)\right]. \quad (16)$$

На рис. 4 представлены графики зависимости от времени амплитуд компонентов тригонометрического косинуса обобщенного кватерниона (10).

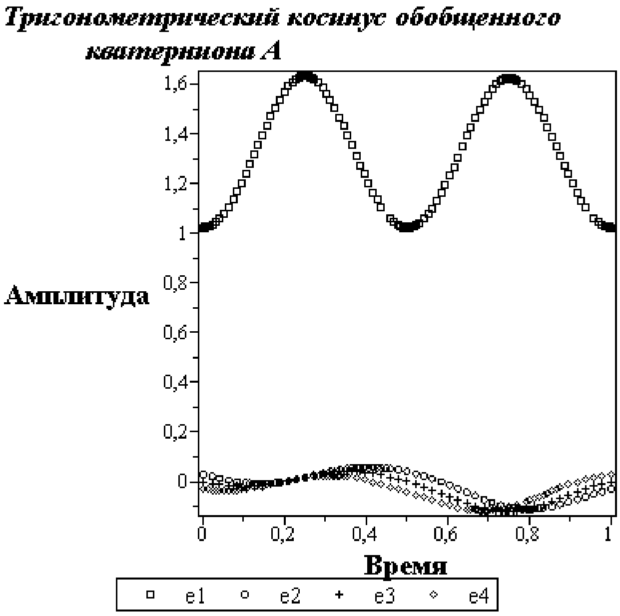

Рис. 4.

Выводы

Полученные в данной работе представления тригонометрических и гиперболических функций в системе обобщенных кватернионов дают возможность получить представления для многих классов некоммутативных гиперкомплексных числовых систем четвертой размерности. Для этого нужно подставить соответствующие параметры α и β. В частности, проверено совпадение с представлениями для систем, рассмотренных в работе [6].

1. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова — К.: НАН України, Ін-т проблем реєстрації інформації, 2010. — 389 с

2. *Каліновський Я.О.* Методи комп’ютерного моделювання та обчислень з використанням гіперкомплексних числових систем: дис. … доктора техн. наук: 01.05.02 / Каліновський Яків Олек-

сандрович; Ін-т пробл. реєстрації інформації НАН України. — К., 2007. — 417 с. — Бібліогр. — С. 323–348.

3. *Калиновский Я.А.* Методы построения нелинейностей в расширениях комплексных чисел / Я.А. Калиновский, Н.В. Роенко, М.В. Синьков // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 4. — С. 178–181.

4. *Калиновский Я.А.* Математическое моделирование представлений экспоненциальной и логарифмической функций в гиперкомплексной числовой системе обобщенных кватернионов / Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова, А.С. Сукало // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2015, — Т. 17, №. 4. — С. 11–20.

5. *Godel C.* An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein`s Field Equations of Gravitation / C. Godel // Rev. Mod. Phys. — 1949. — Vol. 21, N 3. — P. 447–450.

6. *Калиновский Я.А.* Дослідження зв’язків між узагальненими кватерніонами та процедурою подвоєння Грасмана-Кліфорда / Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова, А.С. Туренко // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2015. — Т. 17, № 1. — С. 36–45.

7. *Клипков С.И.* Обощенный анализ матричных представлений ассоциативных гиперкомплексных числовых систем, используемых в задачах энергетики / И.С. Клипков // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2014. — Т. 16, № 2. — С. 28–41.

8. *Mamagami A.B.* Some Notes on Matrix of Generalized Quaternion / A.B. Mamagami, M. Jafari // International Research Journal of Applied and Basic Sciences. — 2013. — Vol 7, N 14. — P. 1164–1171.

9. *Brackx F.* The Exponential Function of a Quaternion Variable / F. Brackx //Applicable Analysis. — 1979. —Vol. 19. — P. 265–276.

10. *Ell T.A.* Quaternion Algebra, in Quaternion Fourier Transforms for Signal and Image Processing / T.A. Ell, N.L. Bihan, S.J. Sangwine. — John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA. — 2014.

11. *Georgiev S.* New Aspects on Elementary Functions in the Context of Quaternionic Analysis CUBO / S. Georgiev, J. Morais, W. Spröβ // Mathematical Journal. —2012, March. — Vol.14, N 01. — P. 93–110.

Поступила в редакцию 21.03.2016