УДК 004.492

Я. О. Каліновський, Ю. Є. Боярінова, А. С. Сукало
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Синтез матричних представлень узагальнених кватерніонів

Синтезовано матричні представлення одного класу некомутативних гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності, побудованих за допомогою некомутативної процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда систем другої вимірності.

Ключові слова: *кватерніон, узагальнений кватерніон, гіперкомплексна числова система, матричне представлення, процедура подвоєння Грасмана-Кліфорда.*

Вступ

При побудові алгоритмів математичного моделювання різних процесів з використанням гіперкомплексних числових систем (ГЧС), розглядаються дві форми представлення інформації: натуральна та матрична.

При матричному представленні кожному базисному елементу e_i відповідає матриця $M(e_i)$ розмірами $n \times n$ [1]. Таким чином, усі дії з гіперкомплексними числами зводяться до дій над матрицями, для яких розроблено різноманітне математичне забезпечення.

У натуральній формі гіперкомплексне число має вигляд

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i , \tag{1}$$

де $e = \{e_i\}_{i=1,..,n}$ — базис ГЧС. При такому поданні гіперкомплексного числа потрібно задавати таблицю Келі множення базисних елементів [12].

Гіперкомплексна числова система є елементом скінченновимірної алгебри з фіксованим базисом, тобто кільцем, яке має структуру векторного простору. Тому на гіперкомплексні числові системи поширюються всі властивості кілець, а саме теорема про вкладеність кілець [2, 3]: будь-яке кільце ізоморфно вкладається в повне кільце матриць. На цій теоремі основане матричне представлення гіперкомплексних числових систем. Оскільки ми розглядаємо клас антикомутативних гіперкомплексних числових систем, то при їхньому застосуванні в різних галузях науки та техніки дослідження матричного представлення є доцільним, оскільки значно зменшує об'єм обчислювальних операцій при математичному моделюванні та розширює можливості їхнього використання для опису поворотів у тривимірному просторі.

Матричні представлення деяких гіперкомплексних числових систем досліджені в ряді робіт. Зокрема, в [1] побудовано матричне представлення ГЧС на основі ізоморфізму. В роботі [4] за допомогою комплексних матриць другого порядку представлено комплексні числа, кватерніони, квадриплексні числа і бікватерніони. Матричне представлення антикватерніонів представлено комплексними матрицями другого порядку в [5], таке ж матричне представлення антикватерніонів уперше запропоновано Дж. Коклем у 1849 році [6].

ГЧС четвертої вимірності побудовані, за допомогою процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда

Досліджуваний у роботі [7] клас некомутативних ГЧС четвертої вимірності складається з некомутативних подвоєнь ГЧС другої вимірності за допомогою процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда (ГК-процедури). Базис таких ГЧС складається з чотирьох елементів. У цій же роботі досліджено властивості таких ГЧС і показано, що досліджуваний клас ГЧС складається з шести представників класів ізоморфізмів:

1) $Д(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}, 4) = \boldsymbol{H}$ — система кватерніонів, таблиця Келі якої має вигляд:

$$\begin{array}{c|cccc} H & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_2 & -e_1 & e_4 & -e_3 \\ e_3 & e_3 & -e_4 & -e_1 & e_2 \\ e_4 & e_4 & e_3 & -e_2 & -e_1 \end{array}; \qquad (2)$$

2) $Д(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{W}, 4) = \boldsymbol{AH}$ — система антикватерніонів:

$$\begin{array}{c|cccc} AH & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_2 & -e_1 & e_4 & -e_3 \\ e_3 & e_3 & -e_4 & e_1 & -e_2 \\ e_4 & e_4 & e_3 & e_2 & e_1 \end{array}; \qquad (3)$$

3) система $Д(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, 4) = Д(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, 4)$:

$Д(C,D,4)$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	0	0
e_4	e_4	e_3	0	0

; (4)

4) система $Д(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}, 4)$:

$Д(W,W,4)$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_1	e_4	e_3
e_3	e_3	$-e_4$	e_1	$-e_2$
e_4	e_4	$-e_3$	e_2	$-e_1$

; (5)

5) система $Д(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}, 4)$:

$Д(D,D,4)$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	0	e_4	0
e_3	e_3	$-e_4$	0	0
e_4	e_4	0	0	0

; (6)

6) система $Д(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{D}, 4) = Д(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{W}, 4)$:

$Д(W,D,4)$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_1	e_4	e_3
e_3	e_3	$-e_4$	0	0
e_4	e_4	$-e_3$	0	0

. (7)

Узагальнені кватерніони та матричні представлення

Як показано в роботі [8], існує зв’язок між системами, що отримані за допомогою ГК-процедури, та узагальненими кватерніонами, які в загальному випадку мають вигляд

$$q = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4\,, \tag{8}$$

де a_i — дійсні числа; e_i при $i = 2,..,4$ — уявні одиниці, які задовольняють наступну таблицю Келі:

$H_{\alpha\beta}$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-\alpha e_1$	e_4	$-\alpha e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$-\beta e_1$	βe_2
e_4	e_4	αe_3	$-\beta e_2$	$-\alpha\beta e_1$

, (9)

де α, $\beta \in$ R.

Проведені дослідження показали, що при конкретних значеннях α та β узагальнені кватерніони відповідають окремим ГЧС із досліджуваного класу, а саме:

1) при $\alpha = 1$, $\beta = 1$ матимемо систему кватерніонів ***H***;
2) при $\alpha = 1$, $\beta = -1$ — систему антикватерніонів ***AH***;
3) систему *Д*(***C***, ***D***, 4) отримаємо при $\alpha = 1$, $\beta = 0$;
4) систему *Д*(***W***, ***D***, 4) отримаємо при $\alpha = -1$, $\beta = 0$;
5) при $\alpha = 0$, $\beta = 0$ матимемо систему *Д*(***D***, ***D***, 4);
6) при $\alpha = -1$, $\beta = -1$ матимемо систему *Д*(***W***, ***W***, 4).

У роботах [9, 10] доведено теорему про ізоморфізм узагальнених кватерніонів $\left(H_{\alpha\beta},+,\cdot\right)$ та повним кільцем матриць $\left(M_{(4,R)},\oplus,\otimes\right)$, тобто, існує таке відображення ψ, що

$$\psi:\left(H_{\alpha\beta},+,\cdot\right)\to\left(M_{(4,R)},\oplus,\otimes\right). \tag{10}$$

Вигляд матриці $\left(M_{(4,R)},\oplus,\otimes\right)$ визначають за допомогою оператора Гамільтона φ_q, а саме:

$$\varphi_q : H_{\alpha\beta} \to H_{\alpha\beta},\ \varphi_q(x) = qx,\ x \in H_{\alpha\beta}. \tag{11}$$

Введений таким чином оператор Гамільтона може бути представлений у вигляді матриці

$$\varphi_q = \begin{bmatrix} a_1 & -\alpha a_2 & -\beta a_3 & -\alpha\beta a_4 \\ a_2 & a_1 & -\beta a_4 & \beta a_3 \\ a_3 & \alpha a_4 & a_1 & -\alpha a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Тобто, $\psi:\left(a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4\right)\mapsto\begin{bmatrix} a_1 & -\alpha a_2 & -\beta a_3 & -\alpha\beta a_4 \\ a_2 & a_1 & -\beta a_4 & \beta a_3 \\ a_3 & \alpha a_4 & a_1 & -\alpha a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$.

Оскільки ми встановили зв'язки між узагальненими кватерніонами та ГЧС четвертої вимірності, побудованими за допомогою ГК-процедури подвоєння, то можна побудувати матричне представлення кожної із розглядуваних систем, підставляючи конкретні значення α та β:

1) система кватерніонів ***H***:

$$M_H = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}; \tag{13}$$

2) система антикватерніонів ***AH***:

$$M_{AH} = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}; \tag{14}$$

3) система $Д($ ***C***, ***D***, 4):

$$M_{Д(C,D,4)} = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}; \tag{15}$$

4) система $Д($ ***W***, ***D***, 4):

$$M_{Д(W,D,4)} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}; \tag{16}$$

5) система $Д($ ***D***, ***D***, 4):

$$M_{Д(D,D,4)} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & a_1 & 0 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}; \tag{17}$$

6) система $Д($ ***W***, ***W***, 4):

$$M_{Д(W,W,4)}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}. \qquad (18)$$

Для перевірки істинності такого матричного представлення, представимо базисні елементи будь-якої із розглядуваних систем (наприклад, системи $Д($ ***W***, ***D***, 4)) у вигляді матриць. Для цього представимо базисні елементи у вигляді

$$q=1\cdot e_1+0\cdot e_2+0\cdot e_3+0\cdot e_4,$$

звідки $a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=0$, $a_4=0$. Підставляючи в (16), отримаємо:

$$e_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно отримаємо матричне представлення інших базисних елементів:

$$e_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи задовольняють вони таблиці Келі (7).

$$e_2^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=e_1,$$

$$e_3^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=0,$$

$$e_4^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=0,$$

$$e_2e_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=e_4,$$

$$e_3e_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=-e_4,$$

$$e_2e_4=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}=e_3,$$

$$e_4e_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=-e_3,$$

$$e_3e_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=0,$$

$$e_4e_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=0.$$

Як бачимо, в такому представленні базисні елементи задовольняють таблиці Келі, отже, матричне представлення істинне. Аналогічно можна перевірити істинність даного матричного представлення і для інших систем.

Матричне представлення досліджуваного класу ГЧС з використанням матриці другого порядку

Ізоморфізм алгебр кватерніонів, антикватерніонів і напівкватерніонів ($Д($**C**, **D**, 4)) комплексним матрицям другого порядку встановлено в роботі [11]. Зокрема, алгебра кватерніонів ізоморфна комплексній матриці другого порядку:

$$M_H=\begin{pmatrix}A & B\\ -\overline{B} & \overline{A}\end{pmatrix}; \tag{19}$$

алгебра антикватерніонів — комплексній матриці другого порядку:

$$M_{AH} = \begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix}; \tag{20}$$

алгебра напівкватерніонів — комплексній матриці другого порядку

$$M_{Д(C,D,4)} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

де A та B — матриці другого порядку ізоморфні комплексним числам a та *b*, а $\overline{A}$ та $\overline{B}$ — матриці, ізоморфні комплексним числам $\overline{a}$ та $\overline{b}$, які спряжені комплексним числам a та *b*.

Також, Розенфельд називає ГЧС $Д(\,\boldsymbol{W}, \boldsymbol{D}, 4)$ алгеброю напівантикватерніонів і показує її ізоморфізм подвійним матрицям другого порядку, які мають вигляд

$$M_{Д(W,D,4)} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix}, \tag{22}$$

де A та B — матриці другого порядку, ізоморфні подвійним числам c та *d*, а $\overline{A}$ — матриця, ізоморфна подвійному числу $\overline{c}$, яке спряжене для c.

Проаналізувавши вищенаведені подання гіперкомплексних числових систем і врахувавши той факт, що розглядувані системи побудовані за допомогою процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда, можна зробити наступні узагальнення.

Кожну із розглядуваних систем четвертої вимірності можна представити у вигляді

$$\Gamma = Д(\Gamma_1(e,2), \Gamma_2(f,2), 4), \tag{23}$$

де $\Gamma_1(e,2)$ та $\Gamma_2(f,2)$ — ГЧС другої вимірності, які ми вибираємо із систем комплексних — $\boldsymbol{C}$, подвійних — $\boldsymbol{W}$ та дуальних чисел — $\boldsymbol{D}$.

Якщо проаналізувати (19), (20), (21) та (22), то можна побачити, що у перших трьох випадках матриці відрізняються лише коефіцієнтом λ при елементі матриці $m_{2,1}$ (другий рядок, перший стовпчик). У випадку кватерніонів цей коефіцієнт рівний $\lambda = -1$, тобто квадрату комплексної уявної одиниці $\lambda = i^2$, $i \in \boldsymbol{C}$. У випадку антикватерніонів (20) $\lambda = 1 = e^2$, $e \in \boldsymbol{W}$. У випадку напівкватерніонів $\lambda = 0 = \varepsilon^2$, $\varepsilon \in \boldsymbol{D}$. У випадку напівантикватерніонів $\lambda = 1 = e^2$, $e \in \boldsymbol{W}$. Тобто,

$$A,\ B\ \in\ \Gamma_1,\ \lambda \in \Gamma_2. \tag{24}$$

Тоді загальне матричне представлення матиме вигляд:

$$M_{Д(Г_1,Г_2,4)} = \begin{pmatrix} A & B \\ \lambda\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix}, \tag{25}$$

Побудуємо матричне представлення досліджуваного класу ГЧС, використовуючи (25). Для цього потрібно представити числа із кожного класу у вигляді комплексних, подвійних чи дуальних чисел з комплексними, подвійними чи дуальними коефіцієнтами. Також нагадаємо матричне представлення систем ***C***, ***W***, ***D***:

— система комплексних чисел:

$$c = a + bi\,,\ i^2 = -1 \ \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; \tag{26}$$

— система подвійних чисел:

$$c = a + be\,,\ e^2 = 1 \ \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}; \tag{27}$$

— система дуальних чисел:

$$c = a + b\varepsilon\,,\ \varepsilon^2 = 1 \ \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Матимемо такі результати:

1) система кватерніонів ***H*** = *Д*(***C***, ***C***, 4):

$$w = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 = (a_1e_1 + a_2e_2) + (a_3e_1 + a_4e_2)e_3 = c_1 + c_2e_3\,,$$

$$c_1, c_2 \in \boldsymbol{C},\ e_3{}^2 = -1\,,$$

$$M_H = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ e_3{}^2\overline{c_2} & \overline{c_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ -a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

2) система антикватерніонів ***AH*** = *Д*(***C***, ***W***, 4):

$$w = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 = (a_1e_1 + a_2e_2) + (a_3e_1 + a_4e_2)e_3 = c_1 + c_2e_3\,,$$

$$c_1, c_2 \in \boldsymbol{C},\ e_3{}^2 = 1\,,$$

$$M_{AH} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ e_3{}^2\overline{c_2} & \overline{c_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}; \tag{30}$$

3) система напівкватерніонів $\text{Д}(\,\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, 4)$:

$$w = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 = (a_1e_1 + a_2e_2) + (a_3e_1 + a_4e_2)e_3 = c_1 + c_2e_3\,,$$

$$c_1, c_2 \in \boldsymbol{C},\; e_3^{\,2} = 0\,,$$

$$M_{\text{Д}(C,D,4)} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ e_3^{\,2}\overline{c_2} & \overline{c_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}; \tag{31}$$

4) система напівантикватерніонів $\text{Д}(\,\boldsymbol{W}, \boldsymbol{D}, 4)$:

$$w = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 = (a_1e_1 + a_2e_2) + (a_3e_1 + a_4e_2)e_3 = c_1 + c_2e_3\,,$$

$$c_1, c_2 \in \boldsymbol{W},\; e_3^{\,2} = 0\,,$$

$$M_{\text{Д}(W,D,4)} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ e_3^{\,2}\overline{c_2} & \overline{c_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & -a_2 & a_1 \end{pmatrix}; \tag{32}$$

5) система $\text{Д}(\,\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}, 4)$:

$$w = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 = (a_1e_1 + a_2e_2) + (a_3e_1 + a_4e_2)e_3 = c_1 + c_2e_3\,,$$

$$c_1, c_2 \in \boldsymbol{W},\; e_3^{\,2} = 1$$

$$M_{\text{Д}(W,W,4)} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ e_3^{\,2}\overline{c_2} & \overline{c_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & -a_2 \\ -a_4 & a_3 & -a_2 & a_1 \end{pmatrix}; \tag{33}$$

6) система $\text{Д}(\,\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}, 4)$:

$$w = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 = (a_1e_1 + a_2e_2) + (a_3e_1 + a_4e_2)e_3 = c_1 + c_2e_3\,,$$

$$c_1, c_2 \in \boldsymbol{D},\; e_3^{\,2} = 0\,,$$

$$M_{\text{Д}(D,D,4)} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ e_3^{\,2}\overline{c_2} & \overline{c_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Для перевірки істинності даного матричного представлення, побудуємо матричне представлення базисних елементів для будь-якої із систем і перевіримо, чи в такому представленні вони задовільняють таблиці Келі. Розглянемо на прикладі системи $\text{Д}(\,\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}, 4)$:

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$e_4=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$e_2^{\,2}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=e_1,$$

$$e_3^{\,2}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=e_1,$$

$$e_4^{\,2}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=-e_1,$$

$$e_2e_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=e_4,$$

$$e_3e_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=-e_4,$$

$$e_2e_4=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=e_3,$$

$$e_4e_2=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}=-e_3,$$

$$e_3e_4=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=-e_2,$$

$$e_4e_3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}=e_2.$$

Як бачимо, в такому представленні базисні елементи також задовільняють таблиці Келі. Аналогічно можна перевірити істинність такого представлення і для інших систем.

Доведемо істинність даного матричного представлення для загального випадку.

Оскільки ми встановили зв'язки між подвоюваними ГЧС та узагальненими кватерніонами, то (8) можна записати у вигляді

$$q = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 = (a_1e_1 + a_2e_2)e_1 + (a_3e_1 + a_4e_2)e_3 = c_1e_1 + c_2e_3, \quad (35)$$

де c_1 та $c_2 \in \Gamma_1$, а $e_3 \in \Gamma_2$.

Розглянемо таке лінійне відображення f_q : $H_{\alpha\beta} \to H_{\alpha\beta}$, яке визначається як $f_q(p) = pq$ для всіх $p \in H_{\alpha\beta}$:

$$f_q(e_1) = e_1(c_1e_1 + c_2e_3) = c_1e_1 + c_2e_3,$$

$$f_q(e_3) = e_3(c_1e_1 + c_2e_3) = e_3c_1e_1 + e_3c_2e_3 = e_3(a_1e_1 + a_2e_2) + e_3(a_3e_1 + a_4e_2)e_3 =$$
$$= (a_1e_3e_1 + a_2e_3e_2) + (a_3e_3e_1e_3 + a_4e_3e_2e_3).$$

Скориставшись (9), матимемо:

$$f_q(e_3) = (a_1e_3 - a_2e_2e_3) + (-\beta a_3e_1 + \beta a_4e_2) = (a_1e_1 - a_2e_2)e_3 - \beta(a_3e_1 - a_4e_2) =$$
$$= -\beta(a_3e_1 - a_4e_2) + (a_1e_1 - a_2e_2)e_3 = -\beta\overline{c_2} + \overline{c_1}e_3.$$

Тобто,

$$f_q(e_1) = c_1e_1 + c_2e_3,$$
$$f_q(e_3) = -\beta\overline{c_2} + \overline{c_1}e_3.$$

Таке перетворення визначається матрицею другого порядку, яка має вигляд:

$$M_q = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -\beta \overline{c_2} & \overline{c_1} \end{pmatrix} c_1, c_2 \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2 \right\}. \tag{36}$$

Як бачимо, отримали підтвердження того, що між узагальненими кватерніонами та подвоєннями існує зв'язок. Більше того, можемо визначити значення α, та β, порівнюючи (36) та (25): коефіцієнт α та β дорівнюють від'ємному квадрату уявної одиниці першої та другої подвоюваних систем, тобто

$$\alpha = -e^2,\ \beta = -f^2, \tag{37}$$

де $e \in \Gamma_1$, $f \in \Gamma_2$.

Побудова матричного представлення досліджуваного класу ГЧС з використанням матриці норми

У роботі [12] норма гіперкомплексного числа (1) в загальному випадку визначається за формулою

$$N(w) = \left\| \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij}^{k} a_i \right\|, \tag{38}$$

де γ_{ij}^{k} — структурні константи гіперкомплексної числової системи, які визначаються з таблиці Келі. На цій основі будується матриця норми, яка має вигляд:

$$N(q) = \begin{vmatrix} a_1 & -\alpha a_2 & -\beta a_3 & -\alpha\beta a_4 \\ a_2 & a_1 & -\beta a_4 & \beta a_3 \\ a_3 & \alpha a_4 & a_1 & -\lambda a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}. \tag{39}$$

Обчисливши детермінант матриці, одержимо норму:

$$N(q) = a_1^2 + \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 + \alpha\beta a_4^2. \tag{40}$$

Можна показати, що введена таким методом норма мультиплікативна, тобто виконується рівність:

$$N(q_1 q_2) = N(q_1) N(q_2). \tag{41}$$

Дійсно, якщо

$$q_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,\quad q_2 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4,$$

тоді $N(q_1) = a_1^2 + \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 + \alpha\beta a_4^2$, $N(q_2) = b_1^2 + \alpha b_2^2 + \beta b_3^2 + \alpha\beta b_4^2$.

Обчислимо ліву частину рівності (41):

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4)(b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4) = \\ &= (a_1 b_1 - \alpha a_2 b_2 - \beta a_3 b_3 - \alpha\beta a_4 b_4) e_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2 - \beta a_4 b_3 + \beta a_3 b_4) e_2 + \\ &+ (a_3 b_1 + \alpha a_4 b_2 + a_1 b_3 - \alpha a_2 b_4) e_3 + (a_4 b_1 - a_3 b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_4) e_4 \end{aligned}$$

Використовуючи (40), отримаємо:

$$\begin{aligned} N(q_1 q_2) &= (a_1 b_1 - \alpha a_2 b_2 - \beta a_3 b_3 - \alpha\beta a_4 b_4)^2 + \alpha (a_2 b_1 + a_1 b_2 - \beta a_4 b_3 + \beta a_3 b_4)^2 + \\ &+ \beta (a_3 b_1 + \alpha a_4 b_2 + a_1 b_3 - \alpha a_2 b_4)^2 + \alpha\beta (a_4 b_1 - a_3 b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_4)^2 = \\ &= a_1^2 (b_1^2 + \alpha b_2^2 + \beta b_3^2 + \alpha\beta b_4^2) + \alpha a_2^2 (b_1^2 + \alpha b_2^2 + \beta b_3^2 + \alpha\beta b_4^2) + \\ &+ \beta a_3^2 (b_1^2 + \alpha b_2^2 + \beta b_3^2 + \alpha\beta b_4^2) + \alpha\beta a_4^2 (b_1^2 + \alpha b_2^2 + \beta b_3^2 + \alpha\beta b_4^2) = \\ &= (a_1^2 + \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 + \alpha\beta a_4^2)(b_1^2 + \alpha b_2^2 + \beta b_3^2 + \alpha\beta b_4^2) = N(q_1) N(q_2) \end{aligned} \quad (42)$$

Виконання мультиплікативності норми дозволяє нам зробити висновок про те, що матриця норми може бути матричним представленням гіперкомплексного числа Тоді матимемо наступні матричні представлення гіперкомплексних чисел із досліджуваного класу ГЧС:

$$M_H = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}, \qquad M_{AH} = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix},$$

$$M_{Д(C,D,4)} = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}, \qquad M_{Д(W,D,4)} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix},$$

$$M_{Д(D,D,4)} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & a_1 & 0 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}, \qquad M_{Д(D,D,4)} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & a_1 & 0 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}.$$

Порівнюючи матричні представлення ГЧС даного випадку з матричними представленнями ГЧС через узагальнені кватерніони, бачимо, що вони однакові. Тому, представлення базисних елементів також співпадатимуть, що дає можливість стверджувати, що при такому представленні вони задовільняють таблиці Келі.

Висновки

У роботі трьома способами побудовано матричні представлення ГЧС, які отримано за допомогою ГК-процедури подвоєння, використовуючи зв'язки досліджуваного класу ГЧС з узагальненими кватерніонами, за допомогою матриць другого порядку та на основі властивості мультиплікативності норми. Оскільки, для матричного прдставлення розроблено різноманітне математичне та програмне забезпечення, то такі представлення дозволяють використовувати досліджуваний клас ГЧС для вирішення практичних задач.

1. *Синьков М.В.* Матричные представления изоморфных гиперкомплексных числовых систем / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2010. — Т. 12, № 4. — С. 43–53.

2. *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре / А.Г. Курош. — М.: Наука, 1973. — 400 с.

3. *Noether E.* Hypercomplex Grossen und Darstellungstheorie / E. Noether // Mathematische Zeitschrift. — 1929. — B. 30. — P. 641–692.

4. *Клипков С.И.* Обощенный анализ матричных представлений ассоциативных гиперкомплексных числовых систем, используемых в задачах энергетики / И.С. Клипков // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2014. — Т. 16, № 2. — С. 28–41.

5. *Alagos Ya.* Split Quaternion Matrices / Ya. Alagos, K. At H. Oral, S. Yuce // Miscolc Mathematical Notes. — 2012. — Vol. 13, N 2. — P. 223–232.

6. *Janovska D.* Linear equations and the Kronecker product in coquaternions / D. Janovska, G. Opfer // Mitt. Math. Ges. Hamburg. — 2013. —Vol. 33. — P. 181–196.

7. *Computing* Characteristics of One Class of Non-commutative Hypercomplex Number Systems of 4-dimension. [Електронний ресурс] / Y.O. Kalinovsky, D.V. Lande, Y.E. Boyarinova, A.S. Turenko. — Режим доступу: http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1409/1409.3193.pdf

8. *Калиновский Я.О.* Дослідження зв'язків між узагальненими кватерніонами та процедурою подвоєння гіперкомплексних числових систем / Я.О. Каліновський, Ю.Є. Боярінова, А.С. Сукало // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2015. — Т. 17, № 1. — С. 36–45.

9. *Mamagami A.B.* Some Notes on Matrix of Generalized Quaternion / A.B. Mamagami, M. Jafari // International Research Journal of Applied and Basic Sciences. — 2013. — Vol 7, N 14. — P. 1164–1171.

10. *Flaut C.* Some equations in algebras obtained by the Cayley-Dickson process / C. Flaut // An. St. Univ. Ovidius Constanta. — 2001. — Vol. 9, N 2. — P. 45–68.

11. *Розенфельд Б.А.* Неевклидовы геометрии / Б.А. Розенфельд. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1995. — 744 с.

12. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Ю.Е. Бояринова, Я.А. Калиновский. — К.: Инфодрук, 2010. — 388 с.

Надійшла до редакції 09.06.2015