УДК 621.791

О. А. Токалин
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Особенности распределения энергии при ультразвуковой сварке микропризменных оптических элементов

Предложена модель волнового переноса энергии в осесимметричных оптических элементах во время их ультразвуковой сварки. С учетом симметрии модели получено приближенное решение краевой задачи, определены амплитуды волн продольных и поперечных колебаний и их резонансные частоты. Рассчитаны планарные распределения упругой энергии и вклады ее составляющих. Основной вклад в центральный максимум распределения энергии в рабочей области частот дают планарные колебания. Снижение негативного влияния этого на качество сварки возможно коррекцией поглощения энергии за счет локального увеличения затухания волн из-за внутренних напряжений.

Ключевые слова: *ультразвуковая сварка, упругие колебания и волны, упругая энергия, резонанс.*

Введение

Ультразвуковая сварка пластмассовых оптических элементов как технологический процесс успешно применяется при изготовлении комбинированных очковых линз с микропризменными элементами для коррекции косоглазия и наборов оптических компенсаторов для диагностики [1, 2]. Для обеспечения герметичности и надежности соединения при сохранении оптического качества изделий сварка производится в периферийной (обычно кольцевой) области соединяемых деталей с использованием продольных колебаний полых сонотродов, область непосредственного ультразвукового воздействия которых ограничена толщиной их стенок. В отличие от прямого теплового воздействия, при сварке ультразвуком перенос энергии упругими волнами приводит к тому, что выделение тепла не ограничивается областью сварного шва, а распространяется на весь объем соединяемых элементов. Это является причиной перегрева оптических элементов, оплавления микрорельефа, растрескивания просветляющих и защитных покрытий за пределами сварного шва, что очевидно недопустимо для оптических систем.

Проблема дозирования воздействия ультразвука с термодинамической точки зрения ранее изучалась различными авторами, начиная еще с пионерских работ.

К настоящему времени накоплен обширный фактический материал, на основании которого даются практические рекомендации для разных полимеров [3], но это относится, главным образом, к интегральным характеристикам. Однако для применения ультразвуковой сварки в оптических технологиях из-за нелокальности поглощения энергии знание только интегральных характеристик воздействия явно недостаточно, так как нужно знать распределение энергии ультразвука по объему свариваемых элементов. Некоторые особенности сварки элементов кольцевой формы отмечены в работе [4], где показана необходимость учета поперечных колебаний в плоскости, перпендикулярной направлению распространения ультразвуковых волн. Однако авторы не учли переноса энергии упругими волнами по всей плоскости, поэтому их подход не может быть использован для решения означенной проблемы. Свариваемые оптические элементы в большинстве случаев представляют собой плоские тела вращения, например, диски. Ответственные за перераспределение энергии собственные моды колебаний дисков изучены достаточно хорошо [5]. В чистом виде эти моды колебаний обычно не проявляются, а на их смешивание определяющее влияние оказывают условия на границе [6, 7]. В связи с этим корректный учет всех факторов, влияющих на распределение энергии при сварке оптических элементов, оказывается актуальным и имеет большое практическое значение.

Постановка задачи

При идеальных условиях продольные колебания наконечника сонотрода симметричны относительно его оси. Простую теоретическую модель процесса можно представить в виде колебаний диска толщиной $2h$ радиуса R, сжимаемого симметричными периодическими усилиями по краю параллельно оси симметрии z. Это схематически показано на рис. 1.

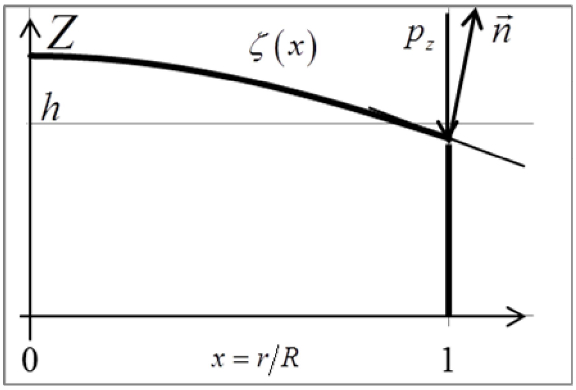

Рис. 1. Схема деформации модельного диска периодическими сжатиями полым наконечником сонотрода

В случае опоры диска по краю колебания зеркально симметричны относительно его центральной плоскости $(z = 0)$, на которой отсутствуют вертикальные смещения, и центр которой естественно принять за начало координат. В случае опоры диска по задней торцевой поверхности, на ней нет вертикальных смещений, и начало координат разумно разместить на ней. При этом, если дополнить диск зеркально симметричным его отражением, получим такую же ситуацию, как и в предыдущем случае, но при удвоенной толщине. По отношению к центральной плоскости горизонтальные смещения являются симметричными и должны описываться четными функциями, тогда как вертикальные смещения являются антисимметричными и должны описываться нечетными функциями координаты z.

Если пренебречь изменением суммарной энергии колебаний за время сварки, то можно приближенно считать процесс стационарным. Для определения пространственного распределения энергии таких квазистационарных колебаний можно использовать амплитуду осциллирующего упругого потенциала [6–8]

$$U = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} = \mu\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}\theta^2 - 2I_2(\varepsilon)\right],\ 2\mu = \frac{E}{1+\nu}, \tag{1}$$

который может быть выражен через инварианты тензоров напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ и/или деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}$, связь между ними определяется законом Гука:

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu\left(\varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\delta_{\alpha\beta}\right). \tag{2}$$

Здесь E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$; $I_2(\varepsilon) = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} - \left(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2\right)$ — инварианты тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$; $\delta_{\alpha\beta}$ — единичный тензор. Амплитудное значение упругого потенциала U определяется максимальным прогибом торцевых поверхностей $\zeta(r,\vartheta)$, который зависит от суммы статического и динамического давления наконечника сонотрода во время сварки оптических элементов. Векторное уравнение движения элементарного объема можно представить в виде

$$\frac{E}{(1+\nu)}\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\vec{\nabla}\theta - \vec{\nabla}\times\vec{\Omega}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial}{\partial t}\vec{u}\right), \tag{3}$$

где $\vec{\Omega} = \vec{\nabla}\times\vec{u} = \{0,\Omega,0\}$, так как при аксиально-симметричном возбуждении колебаний вектор смещений в цилиндрической системе отсчета не имеет азимутальной компоненты и не зависит от азимутального угла: $\vec{u} = \{u,0,w\}$ [6–8];

$$\theta = \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ru + \frac{\partial}{\partial z}w \ \text{ и } \ \Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}\right) \tag{4}$$

— вспомогательные скалярная и псевдоскалярная функции, характеризующие изменения объема и формы. Пренебрегая малыми нелинейными эффектами и учитывая то, что вектор $\vec{\Omega}$ имеет одну ненулевую азимутальную компоненту Ω, векторное уравнение (4) можно разделить на два скалярных уравнения при помощи применения к нему операторов $\vec{\nabla}\cdot$ и $\vec{\nabla}\times$:

$$\nabla^2\theta = c_l^{-2}\ddot{\theta} \quad \text{и} \quad \nabla^2\Omega - r^{-2}\Omega = c_t^{-2}\ddot{\Omega}, \tag{5}$$

в которых $\nabla^2 = \nabla_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — Лапласиан в цилиндрических координатах; $c_l = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)\rho_0}}$ и $c_t = \sqrt{\frac{E}{(1+\nu)\rho_0}}$ — скорости продольной и поперечной упругих волн. Точками обозначены производные по времени. В терминах волновых процессов данная модель описывает возбуждение продольных и поперечных упругих волн в диске за счет периодического изменения граничных условий на боковой поверхности диска. В тонких слоях такие волны называются волнами Лэмба [5].

Теоретический анализ модели и полученные результаты

В ультразвуковых сварочных установках обеспечиваются условия резонанса, поэтому ультразвуковое воздействие можно считать монохроматическим. Благодаря этому в (5) можно исключить дифференцирование по времени, переходя к Фурье-образам функций θ и Ω, и уравнения (5) преобразуются к виду

$$(\nabla^2 + k_l^2)\theta = 0 \quad \text{и} \quad (\nabla^2 - r^{-2} + k_t^2)\Omega = 0, \tag{6}$$

где $k_{l,t} = \omega / c_{l,t}$ — соответствующие волновые числа, причем $k_l = \sqrt{\frac{1-2\nu}{1-\nu}} k_t = \gamma k_t \le k_t$.

В соответствии с замечанием относительно симметрии компонентов u и w, θ является четной функцией z, а Ω — нечетной. Кроме того, толщины оптических элементов много меньше длин волн ультразвуковых колебаний (при $f \sim 20$ кГц), то есть $k_t h \ll 1$. Волновые числа являются естественными масштабными коэффициентами в волновых уравнениях (6), потому в пределах $\pm h$ изменения $\theta(z)$ и $\Omega(z)$ незначительны, и в (6) можно ограничиться первыми членами их разложения в ряд по kz:

$$\theta(r,z) \approx \theta_0(r)\left[1 + a(\gamma kz)^2\right] \quad \text{и} \quad \Omega(r,z) \approx \beta_0(r) kz\left[1 + b(kz)^2\right]. \tag{7}$$

Коэффициенты разложения имеют вид логарифмических производных:

$$a = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 \ln\theta}{\partial(\gamma kz)^2} + \left(\frac{\partial \ln\theta}{\partial \gamma kz}\right)^2\right]_{z=0} \quad \text{и} \quad b = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 \ln\beta}{\partial(kz)^2} + \left(\frac{\partial \ln\beta}{\partial kz}\right)^2\right]_{z=0}. \tag{8}$$

Подставляя (7) в (6) и пренебрегая членами с $(kz)^2$ по сравнению с 1, получим уравнения

$$\nabla_r^2\theta_0 + \left(\gamma k\sqrt{1+2a}\right)^2\theta_0 = 0 \quad \text{и} \quad \left(\nabla_r^2 - r^{-2}\right)\beta_0 + \left(k\sqrt{1+6b}\right)^2\beta_0 = 0\,, \tag{9}$$

решения которых выражаются через функции Бесселя порядка 0 и 1 или через модифицированные функции Бесселя, в зависимости от знака квадратов волновых чисел $\kappa_l = \gamma k\sqrt{1+2a}$ и $\kappa_t = k\sqrt{1+6b}$. Учитывая тождество $I_m(\xi) = i^{-m}J_m(i\xi)$ [8], получим:

$$\theta(r,z) = C_\theta J_0(\kappa_l r)\left[1 + a(\gamma kz)^2\right] \quad \text{и} \quad \beta(r,z) = C_\Omega J_1(\kappa_t r)\left[1 + b(kz)^2\right]kz\,. \tag{10}$$

Далее, для решения краевой задачи и применения граничных условий необходимо найти компоненты вектора смещения и их производные. Используем уравнения (4) и линейные комбинации вида:

$$u(r,z) = \phi_a(z)J_1(\kappa_l r) + \phi_b(z)J_1(\kappa_t r) \quad \text{и} \quad w(r,z) = \psi_a(z)J_0(\kappa_l r) + \psi_b(z)J_0(\kappa_t r)\,. \tag{11}$$

В результате получим систему уравнений, интегрирование которой дает

$$\kappa_l\phi_a = C_\theta\left[1 + A + A\frac{(\kappa_l z)^2}{2!}\right],\ \kappa_l\psi_a = -C_\theta A\kappa_l z\,,\ A = 2a\left(\frac{\gamma k}{\kappa_l}\right)^2 + \frac{\kappa_l C_l}{C_\theta}, \tag{12,a}$$

$$\kappa_t\psi_b = 2kzC_\Omega(1+B),\ \kappa_t\phi_b = -2C_\Omega\frac{k}{\kappa_t}\left[1 + B + B\frac{(\kappa_t z)^2}{2!}\right],\ B = 6b\frac{k^2}{\kappa_t^2} + \frac{\kappa_t^2 C_t}{2\kappa_t C_\Omega}, \tag{12,б}$$

где для компактности формул вместо констант интегрирования $C_{l,t}$ введены константы A и B и сохранены только члены разложения не выше второго порядка. Соответственно компоненты вектора смещения в этом приближении имеют вид:

$$u = CR\left[\frac{1+A}{\mathrm{K}_l}J_1(\mathrm{K}_l x) - \eta\frac{1+B}{\mathrm{K}_t}J_1(\mathrm{K}_t x) + \frac{A\mathrm{K}_l J_1(\mathrm{K}_l x) - \eta B\mathrm{K}_t J_1(\mathrm{K}_l x)}{2}\left(\frac{z}{R}\right)^2\right] \approx$$

$$\approx CR\left[\frac{1+A}{\mathrm{K}_l}J_1(\mathrm{K}_l x) - \eta\frac{1+B}{\mathrm{K}_t}J_1(\mathrm{K}_t x)\right] = R\left[u_{0l}J_1(\mathrm{K}_l x) - u_{0t}J_1(\mathrm{K}_t x)\right], \tag{13,a}$$

$$w = -Cz\left[AJ_0(\mathrm{K}_l x) - \eta(1+B)J_0(\mathrm{K}_t x)\right] = -z\left[w_{0l}J_0(\mathrm{K}_l x) - w_{0t}J_0(\mathrm{K}_t x)\right], \tag{13,б}$$

где $x = \dfrac{r}{R}$; $\mathrm{K}_{l,t} = \kappa_{l,t}R$; $\eta = \dfrac{2kC_\Omega}{\kappa_t C_\theta}$ — коэффициент связи между поперечными и продольными модами. В формулах (13,*а*), (13,*б*) присутствует только одна константа интегрирования $C_\theta = C$, вместо C_Ω используется η. Как нетрудно заметить, отношение амплитуд колебаний вдоль оси диска к амплитудам планарных колебаний пропорционально отношению h/R, которое для микропризм много меньше единицы.

Граничные условия следуют из условия равновесия упругого тела, на поверхность которого действуют внешние силы [7]

$$\left(p_\alpha - \sum_\beta \sigma_{\alpha\beta} n_\beta\right) df = 0, \tag{14}$$

где df — элемент площади поверхности; $p_\alpha = p_z$ — давление наконечника сонотрода; $\vec{n}$ — нормаль к поверхности. Для торцевых поверхностей, сформированных вращением вокруг оси Z образующих $\pm\zeta(r) = \pm h + w(r, \pm h)$, проекции нормали на оси и элемент площади поверхности определяются производной от образующей

$$n_r = \sin\alpha = \frac{\zeta'(r)}{\sqrt{1+(\zeta')^2}} \approx \zeta', \; n_z = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(\zeta')^2}} \approx 1 \;\text{ и }\; df = \frac{r dr d\vartheta}{\cos\alpha} \approx 2\pi r dr,$$

где α — угол отклонения нормали от вертикальной оси Z, а его величина

$$\mathrm{tg}\alpha = \zeta' = \frac{\partial\zeta}{\partial r} = C\frac{h}{R}\left[A\mathrm{K}_l J_1(\mathrm{K}_l x) - \eta(1+B)\mathrm{K}_t J_1(\mathrm{K}_t x)\right] \tag{15}$$

мала вследствие малости отношения h/R и констант CA и $\eta C(1+B)$. Общее уравнение (14) для торцевой поверхности преобразуется к двум условиям:

$$(p_r - \sigma_{rr}\zeta' - \sigma_{rz}) df \approx -(\sigma_{rr}\zeta' + \sigma_{rz}) d\pi r^2, \text{ при } z = h, \tag{16,а}$$

$$(p_z - \sigma_{rz}\zeta' - \sigma_{zz}) df \approx (p_z - \sigma_{zz}) d\pi r^2, \; z = h. \tag{16,б}$$

Вычисляя компоненты тензора напряжений и подставляя их в (16,*а*), (16,*б*), не трудно заметить, что вследствие различия волновых чисел для продольных и поперечных волн $(\kappa_l \neq \kappa_t)$ эти условия не удовлетворяются на всей торцевой поверхности. Поэтому граничные условия вида (16) обычно заменяются интегральными условиями, усредненными по всей площади поверхности:

$$\int_0^R d(\pi r^2)(p_z - \sigma_{zz}) = 0 \;\text{ и }\; \int_0^R d(\pi r^2)(\sigma_{rr}\zeta' + \sigma_{rz}) = 0. \tag{17}$$

Пренебрегая толщиной стенок наконечника соноторода и полагая зависимость давления от радиуса δ — функциональной: $p_z = (2\pi R)^{-1} P\delta(r-R)$, где P —

сила давления сонотрода, и вычисляя интегралы (17), получим:

$$P = 4\pi R^2 \mu C \left[\frac{\nu - (1-2\nu) A}{(1-2\nu) \mathrm{K}_l} J_1(\mathrm{K}_l) + \eta \frac{1+B}{\mathrm{K}_t} J_1(\mathrm{K}_t) \right], \tag{18,а}$$

$$4\pi R^2 \mu C \frac{h}{R} \left[\frac{A}{\mathrm{K}_l} \int_0^{\mathrm{K}_l} dxx J_1(x) - \eta \frac{1+2B}{2\mathrm{K}_t} \int_0^{\mathrm{K}_t} dxx J_1(x) \right] =$$

$$= 0 \to AF(\mathrm{K}_l) - \eta \frac{1+2B}{2} F(\mathrm{K}_t) = 0, \tag{18,б}$$

где использованы табулированные функции вида [9]:

$$F(\mathrm{K}) = \frac{1}{\mathrm{K}} \int_0^{\mathrm{K}} dx J_0(x) - J_0(\mathrm{K}). \tag{19}$$

Для боковой поверхности с образующей $\chi(z) = R + u(R) = = R + \phi_a(z) J_1(\mathrm{K}_l) + \phi_b(z) J_1(\mathrm{K}_t)$, элемент дуги которой $dl = \sqrt{1+\chi_z'^2}dz$, проекции нормали вычисляются аналогично:

$$n_r = \cos\alpha^* = \frac{1}{\sqrt{1+\chi_z'^2}} \approx 1 \text{ и } n_z = \sin\alpha^* = \frac{\chi'(z)}{\sqrt{1+\chi_z'^2}} \approx \chi'(z),$$

где α^* — угол отклонения нормали от горизонтальной плоскости;

$$\mathrm{tg}\beta = \chi'(z) = C\frac{z}{R}\left[A\mathrm{K}_l J_1(\mathrm{K}_l) - \eta B \mathrm{K}_t J_1(\mathrm{K}_t) \right], \tag{20}$$

поэтому условие равновесия (14) преобразуется в два уравнения:

$$(1+A)\left[J_0(\mathrm{K}_l) - \frac{J_1(\mathrm{K}_l)}{\mathrm{K}_l} \right] - \eta(1+B)\left[J_0(\mathrm{K}_t) - \frac{J_1(\mathrm{K}_t)}{\mathrm{K}_t} \right] = -\frac{\nu}{1-2\nu} J_0(\mathrm{K}_l), \tag{21,а}$$

$$\frac{P}{2\pi R} = \mu C \frac{h^2}{R} \left[A\mathrm{K}_l J_1(\mathrm{K}_l) - \eta \frac{1+2B}{2} \mathrm{K}_t J_1(\mathrm{K}_t) \right]. \tag{21,б}$$

Из уравнений (18) и (21) получим:

$$AC = \frac{F(\mathrm{K}_t)}{\Delta_A^*}\Theta = \frac{F(\mathrm{K}_t)}{\Delta_A^*} \cdot \frac{P(\omega)}{2\pi h^2 \mu} = \frac{F(\mathrm{K}_t)}{\Delta_A^*} \cdot \frac{P(\omega)(3-2\gamma^2)}{\pi h^2 E (2-\gamma^2)}, \tag{22,а}$$

$$\eta(1+B)C = \left\{ \left[1 + \frac{\delta^2}{N_{\mathrm{K}}} \right] Z(\mathrm{K}_l) + \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2} J_1'(\mathrm{K}_l) \right\} \frac{J_1(\mathrm{K}_l) F(\mathrm{K}_t)}{\mathrm{K}_l \Delta_A^* \Delta_B^*} \Theta, \tag{22,б}$$

$$C=\left\{\left[1+\frac{\delta^2}{N_\text{К}}\right]J_1(\text{К}_l)J_1'(\text{К}_t)-\frac{\text{К}_l}{\text{К}_t}J_1(\text{К}_t)J_1'(\text{К}_l)\right\}\frac{F(\text{К}_t)}{\text{К}_l\Delta_A^*\Delta_B^*}\Theta, \qquad (22,в)$$

$$\eta C=\eta(1+B)C-\frac{F(\text{К}_l)}{F(\text{К}_t)}AC, \qquad (22,г)$$

где $\delta=\dfrac{h}{R\sqrt{2}}$ — малая величина; $N_\text{К}=\dfrac{F(\text{К}_t)J_1(\text{К}_l)}{\text{К}_l\text{К}_t\Delta_A}$ — безразмерный коэффициент, величина которого для разумных значений параметров К_l и К_t существенно превышает δ, поэтому отношением $\delta^2/N_\text{К}$ в (22,*б*) и (22,*в*) можно пренебречь по сравнению с единицей:

$$\left.\begin{aligned}
&Z(\text{К})=\frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}J_0(\text{К})+J_1'(\text{К})=\frac{1}{\gamma^2}J_0(\text{К})-\frac{1}{\text{К}}J_1(\text{К}),\\
&\Delta_A^*=\text{К}_lJ_1(\text{К}_l)F(\text{К}_t)-\text{К}_tJ_1(\text{К}_t)F(\text{К}_l)=\text{К}_t\Delta_A,\\
&\Delta_B^*=\frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}J_1'(\text{К}_t)\frac{J_1(\text{К}_l)}{\text{К}_l}+Z(\text{К}_l)\frac{J_1(\text{К}_t)}{\text{К}_t}=\frac{\Delta_B}{\text{К}_l}.
\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

К сожалению, даже приближенное решение задачи оказывается весьма громоздким, поэтому в первом приближении для микропризм с характерным соотношением размеров $\delta\sqrt{2}=h/R\approx(1{,}5\ \text{мм}/15\ \text{мм})=0{,}1$ разумно предположить, что изменения функций θ и Ω по толщине относительно невелики. Коэффициенты разложения в (10), которые определяются как вторые логарифмические производные, малы, и ими можно пренебречь. В этом случае длина волн поперечных колебаний с частотой 20 кГц для оргстекла (ПММА) составляет $\lambda_t\approx 6{,}5$ см, откуда $\gamma\approx 0{,}58...0{,}6$, $\text{К}=(2\pi R/\lambda_t)\approx 1{,}45$ и $\gamma\text{К}=(2\pi R/\lambda_l)\approx 0{,}85...0{,}87$. Эти значения меньше первых нулей функций J_0 и J_1, следовательно, в плоскости микропризм укладывается менее четверти длины волны, и поэтому резонанс для таких волн невозможен. Частотные зависимости амплитуд продольных и поперечных упругих волн, рассчитанные для диска из ПММА показаны на рис. 2. Резонансная частота колебаний, соответствующая полюсу $\text{К}=2{,}59$, для диска диаметром 30 мм равна $f_r=\omega/2\pi=35{,}7$ кГц, что в 1,5 раза больше рабочей частоты.

Результаты расчетов для других материалов показаны на рис. 3 в виде зависимости резонансной частоты от коэффициента Пуассона. Как видно из представленных данных, все полюса расположены выше значения $\text{К}=2$ даже в случае малых значений коэффициента Пуассона ν и увеличиваются с его ростом так, что простое условие, ограничивающее резонансные частоты $f_r\ge c_t/\pi R$, удовлетворяется почти для всех известных материалов и может служить удобным критерием резонанса.

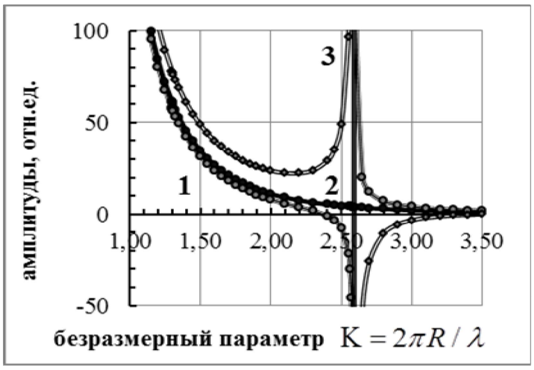

Рис. 2. Частотные зависимости амплитуд колебаний диска: 1 — продольные колебания в плоскости диска, u_{l0}; 2 — продольные колебания вдоль оси, w_{l0}; 3 — поперечные колебания

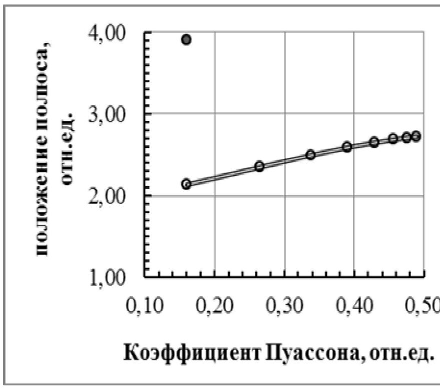

Рис. 3. Зависимость положения полюса частотной характеристики от коэффициента Пуассона. Темная точка — второй полюс характеристики

Учитывая малость недиагональных компонентов тензоров деформаций и напряжений по сравнению с диагональными компонентами и то, что в энергию упругих колебаний они входят в квадратичном виде, вкладом недиагональных компонентов можно пренебречь. Тогда потенциальную энергию формально можно представить в виде суммы

$$U = \frac{1}{2}\sum_{ii}\sigma_{ii}\varepsilon_{ii} = U_r + U_\vartheta + U_z, \tag{24}$$

в которой слагаемые

$$U_{r,\vartheta,z} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ii}\sigma_{ii} = \mu\left[\varepsilon_{ii}^2 + \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}\theta\varepsilon_{ii}\right] = \frac{\sigma_{ii}}{4\mu}\left(\sigma_{ii} - 2\mu\frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}\theta\right),\ i = r,\vartheta,z \tag{25}$$

по отдельности не имеют физического смысла энергии, но удобны для расчетов:

$$\varepsilon_{rr} = AC\left[\left(1+\frac{\Delta_C}{\Delta_B}\right)J_1'(\gamma Kx) - \xi J_1(\gamma K)J_1'(Kx)\right], \tag{26,а}$$

$$\varepsilon_{\vartheta\vartheta} = AC\left[\left(1+\frac{\Delta_C}{\Delta_B}\right)\frac{J_1(\gamma Kx)}{\gamma Kx} - \xi J_1(\gamma K)\frac{J_1(Kx)}{Kx}\right], \tag{26,б}$$

$$\varepsilon_{zz} = AC\left[\xi J_1(\gamma K)J_0(Kx) - J_0(\gamma Kx)\right], \tag{26,в}$$

где

$$\xi = \frac{1}{\Delta_B}\left[\frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}J_1'(\gamma K) + Z(\gamma K)\right],\ \Delta_C = J_1(\gamma K)J_1'(K) - \gamma J_1(K)J_1'(\gamma K). \tag{27}$$

Можно заметить, что сумма диагональных деформаций (26,*а*)–(26,*в*) равна относительному изменению объема $\theta(x)$, что и следовало ожидать.

Результаты расчетов распределения энергий колебаний в плоскости диска в виде радиальных зависимостей, выполненных для тонкого диска из ПММА диаметром 30 мм, возбуждаемых сонотродом с тонким кольцевым наконечником во время их сварки ультразвуком с частотой 20 кГц, представлены на рис. 4. Аналогичные расчеты распределения упругой энергии выполнены для ультразвукового воздействия с другими частотами.

Из полученных данных следует, что основная доля энергии колебаний приходится на центр диска, но характер распределения энергии существенно различается для частот, меньших или больших резонансной частоты. В первом случае наибольший вклад в центральный максимум дают планарные колебания, переносимые волнами Лэмба, тогда как энергия, расходуемая непосредственно на сварку, которой соответствует второй максимум на границе диска (при $x = 1$), определяется колебаниями вдоль оси. Во втором случае периферийного максимума вообще нет, а вклад планарных и осевых колебаний в центральный максимум одинаков. Поэтому использование этой области частот для ультразвуковой сварки не рационально. Частотная зависимость относительных величин периферийного максимума и минимума распределения упругой энергии для области субрезонансных частот, показанная на рис. 5, иллюстрирует эти изменения профилей распределения энергии.

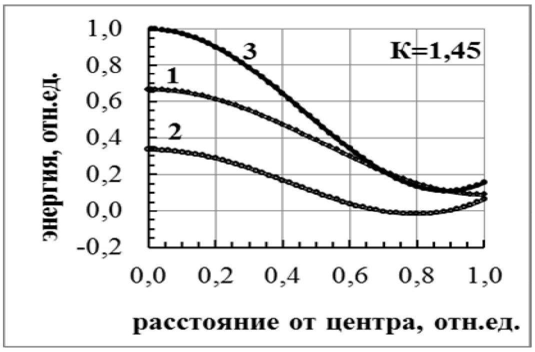

Рис. 4. Профили распределения упругой энергии колебаний: 1 — планарные колебания; 2 — колебания вдоль оси; 3 — суммарная энергия колебаний модельного диска

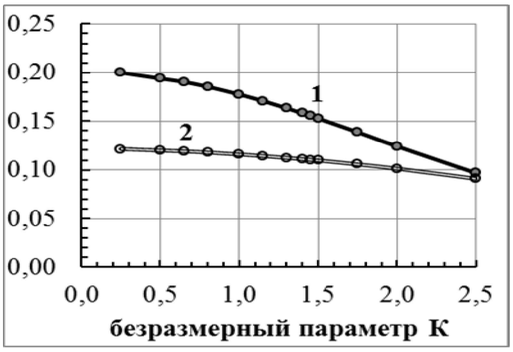

Рис. 5. Частотные зависимости относительных значений периферийного максимума (1) и минимума (2) упругой энергии, нормированные на величину центрального пика

Полученные результаты относятся к упругой энергии колебаний, тогда как в основе процессов сварки лежит преобразование в теплоту локально поглощенной энергии. Поглощение энергии волн упругих колебаний определяется величиной их затухания $\alpha(\vec{r})$, а величину поглощенной энергии можно представить в виде произведения:

$$\mathrm{E}(\vec{r}) = \alpha(\vec{r}) U(\vec{r}).$$

Затухание упругих волн, как показано, например в [10], зависит от наличия внутренних напряжений. Соответственно, распределение поглощенной энергии ультразвука может быть скорректировано путем образования локальных областей напряжений, в которых затухание упругих волн повышено. Это достигается использованием выступающих элементов, обладающих острыми кромками в месте сварки, которые служат концентраторами напряжений в области сварного шва.

Выводы

На основании предложенной модели воздействия ультразвука при сварке полым тонкостенным сонотродом тонких дискообразных оптических элементов и ее приближенного анализа оказалось возможным показать определяющую роль упругих волн Лэмба в формировании профилей распределения энергии ультразвука в объеме свариваемых элементов. Установлен простой критерий резонанса и оценены вклады продольных и поперечных мод колебаний в характеристики планарного распределения энергии, а также указана возможность их коррекции.

1. *Технология* изготовления и методика применения в офтальмологии микропризменных элементов Френеля / В.В. Петров, Н.М. Сергиенко, С.А. Рыков [и др.] // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2008. — Т. 10, № 3. — С. 5–17.

2. *Бутенко Л.В.* Підсумки першого року відпрацювання технології виготовлення комбінованих окулярів для лікування косоокості / Л.В. Бутенко // Щорічна підсумкова наукова конференція 24–25 лютого 2011 р. — К.: ІПРІ НАН України. — 2011. — С. 19.

3. *Ультразвуковая* сварка термопластичных полимеров [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.ultrasonic.com.ua/docum/us%20plastic%2006.pdf

4. *Хмелев В.Н.* Моделирование процесса ультразвуковой сварки полимерных материалов кольцевой формы / В.Н. Хмелев, А.Н. Сливин, А.Д. Абрамов // Всероссийская конференция ИАМП-2010 (Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях). — Бийск: Алт. ГТУ. — 2010. — С. 206-210. — Режим доступа: http://iamp.e-digit.ru

5. *Ультразвук.* Маленькая энциклопедия; под ред. И.П. Голяминой. — М.: Сов. энциклопедия, 1979. — 400 с.

6. *Ляв А.* Математическая теория упругости / А. Ляв. — М.-Л.: ОНТИ, 1935. — 674 с.

7. *Ландау Л.Д.* Теория упругости / Л.Д. Ландау, У.М. Лифшиц. — [4-е изд.], — М.: Наука, 1987. — 250 с.

8. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. — М.: Наука, 1970. — 940 с.

9. *Справочник* по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами; под ред. М. Абрамовица и И. Стиган: пер. с англ. / под. ред. В.А. Диткина и Л.Н. Кармазиной. — М.: Наука, 1979. — 832 с.

10. *Токалин О.А.* Влияние статических внутренних напряжений на прохождение упругих волн в твердом теле / О.А. Токалин // Реєстрація, зберігання і оброб. даних: зб. наук. праць Щорічної підсумкової наук. конф. 27–28 лютого 2013 р. / НАН України. Ін-т проблем реєстрації інформації; відпов. ред. В.В. Петров. — К.: ІПРІ НАН України — 2013. — С. 28–35.

Поступила в редакцию 14.04.2015