УДК 004.492

Я. О. Каліновський, Ю. Є. Боярінова, А. С. Туренко
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Обчислювальні властивості одного класу некомутативних гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності

Досліджено клас некомутативних гіперкомплексних числових систем (ГЧС) четвертої вимірності, які побудовано за допомогою некомутативної процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда систем другої вимірності. Побудовано всі ГЧС цього класу, досліджено алгоритми виконання операцій у них а також методи обчислення таких алгебраїчних характеристик, як спряження, нормування, вигляд дільників нуля. Виведено формули представлення експоненціальної функції у цих системах.

Ключові слова: *кватерніон, гіперкомплексна числова система, дільник нуля, псевдонорма, спряження, процедура подвоєння Грасмана-Кліфорда.*

Вступ

Система комплексних чисел ***C***, яку відкрили італійські математики Д. Кардано та Р. Бомбелі, широко використовується в науці та техніці і донині є одним з основних математичних апаратів для багатьох теорій і застосувань. Це стимулювало дослідження в галузі пошуку числових систем більших вимірностей, які б дозволили настільки ж ефективно розв'язувати не тільки задачі на площині, але й тривимірні і більших вимірностей. Тривалий час такі системи побудувати не вдавалося.

І тільки В.Р. Гамільтон зміг побудувати таку числову систему четвертої вимірності, яка має властивості ділення та асоціативності, але є некомутативною. Мова йде про систему кватерніонів ***H*** , вперше подану В.Р. Гамільтоном у 1844 р. у роботі [1], і яка знайшла широке застосування в багатьох наукових напрямках: в механіці твердого тіла для опису обертання в просторі, при розв'язуванні задач навігації, орієнтації і управлінням руху; в комп'ютерній анімації, дослідженні деформації пружних конструкцій, фільтрації кольорових зображень, криптографії та ін. Детальніше можна ознайомитись у роботі [2].

Виходячи з вищенаведеного, доцільно дослідити й інші некомутативні гіперкомплексні числові системи (ГЧС) четвертої вимірності. Таких ГЧС, у принципі, дуже багато. Оскільки вивчити всі системи дуже важко, то доцільно дослідити окремі класи таких ГЧС. У зв'язку з тим, що кватерніони $\boldsymbol{H}$ є результат некомутативного подвоєння за допомогою процедури Грасмана-Кліфорда системи комплексних чисел $\boldsymbol{C}$ тією ж системою комплексних чисел, то автори вирішили обмежитися саме класом ГЧС четвертої вимірності, які одержано шляхом некомутативного подвоєння за допомогою процедури Грасмана-Кліфорда основними ГЧС другої вимірності: комплексною — $\boldsymbol{C}$, подвійною — $\boldsymbol{W}$ та дуальною — $\boldsymbol{D}$.

Постановка задачі

У даній роботі поставлено задачу дослідження арифметичних та алгебраїчних операцій та процедур у класі ГЧС, утворених за допомогою процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда. Побудовано експоненціальні функції таких систем.

Процедури подвоєння

Рекурентні процедури подвоєння ГЧС дозволяють будувати ряди ГЧС підвищеної вимірності. Існують два типи процедур подвоєння: процедура Келі-Діксона (КД-процедура) та процедура Грасмана-Кліфорда (ГК-процедура).

У даній роботі використаємо процедуру подвоєння Грасмана-Кліфорда, яка більш детально описана в роботах [3, 5, 6]. Дана процедура дозволяє одержувати ГЧС з більш широкими можливостями як за вимірністю, так і за властивостями.

Для виконання ГК-процедури необхідно ввести наступні позначення. В найбільш загальному випадку ГЧС будемо позначати так: $\Gamma(e,n)$, де $e = \{e_1,...,e_n\}$ — базис ГЧС, а n — її вимірність. У тому випадку, коли мова йде про ГЧС конкретного типу, вона буде позначатись ім'ям свого типу, як, наприклад система комплексних чисел $\boldsymbol{C}(e)$. Тут вимірність можна не вказувати, оскільки вона відома з типу ГЧС. Але ідентифікатор базису e приводити треба, оскільки при подвоєнні можуть розглядатися два примірника ГЧС одного типу, але їхні базиси треба відрізняти між собою.

Позначимо процес подвоєння системи $\Gamma_1(e,m)$ системою $\Gamma_2(f,2)$ за допомогою некомутативної ГК-процедури так:

$$Д\left(\Gamma_1(e,m),\Gamma_2(f,2)\right) = \Gamma_3(g,2m),$$

де $Д$ — оператор подвоєння, а $2m$ — вимірність одержаної у результаті подвоєння ГЧС Γ_3. $2m$ елементами базису g будуть всілякі добутки елементів базисів e та f:

$$g = \{e_1f_1, e_1f_2, e_2f_1,..., e_mf_2\}.$$

Таблиця Келі складається з добутків елементів базису g, значення яких відображає властивості конкретної ГЧС.

Визначення досліджуваного класу ГЧС

Досліджуваний у даній роботі клас некомутативних ГЧС четвертої вимірності складається з некомутативних подвоєнь ГЧС другої вимірності за допомогою ГК-процедури.

Базис таких ГЧС складається з чотирьох елементів:

$$g = \{g_1, g_2, g_3, g_4\} = \{e_1 f_1, e_1 f_2, e_2 f_1, e_2 f_2\}.$$

Звичайно, двосимвольні елементи можна замінити односимвольними елементами з індексами. Але це буде зроблено пізніше, оскільки на даному етапі доцільно користуватися двосимвольними.

Досліджуваний клас ГЧС буде визначатися наступними умовами.

1. Елементи базисів e_1 та f_1 — одиничні елементи своїх систем.

2. Елементи таблиці Келі ГЧС g є добутки вигляду: $g_i g_k = e_j f_s e_t f_r$, значення яких можна обчислити шляхом комутації множників і використання таблиць Келі подвоюваних ГЧС; при цьому будемо вважати, що e_1 та f_1 комутують з e_2 та f_2, тобто $e_1 f_2 = f_2 e_1, e_2 f_1 = f_1 e_2$, а останні антикомутують між собою, тобто $e_2 f_2 = -f_2 e_2$. Наприклад:

$$\begin{gathered}
g_1 g_1 = e_1 f_1 e_1 f_1 = e_1 e_1 f_1 f_1 = e_1 f_1 = g_1, \\
g_2 g_1 = e_1 f_2 e_1 f_1 = e_1 e_1 f_2 f_1 = e_1 f_2 = g_2, \\
g_2 g_3 = e_1 f_2 e_2 f_1 = -e_1 e_2 f_2 f_1 = -e_2 f_2 = -g_4, \\
g_2 g_2 = e_1 f_2 e_1 f_2 = e_1 e_1 f_2 f_2 = e_1 f_2 f_2, \\
g_4 g_4 = e_2 f_2 e_2 f_2 = -e_2 e_2 f_2 f_2.
\end{gathered}$$

Останні два приклади елементів таблиці Келі можна довести до кінця тільки для конкретних подвоюваних ГЧС.

3. Елементи таблиці Келі, які знаходяться під головною діагоналлю, але не в першому стовпчику, протилежні елементам, симетричним відносно головної діагоналі, тобто

$$g_3 g_2 = -g_2 g_3; g_4 g_2 = -g_2 g_4; g_4 g_3 = -g_3 g_4.$$

З урахуванням цих умов узагальнена таблиця Келі для ГЧС досліджуваного класу буде мати такий вигляд:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\
\hline
g_1 & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\
g_2 & g_2 & e_1 f_2 f_2 & -g_4 & -e_2 f_2 f_2 \\
g_3 & g_3 & g_4 & e_2 e_2 f_1 & e_2 e_2 f_2 \\
g_4 & g_4 & e_2 f_2 f_2 & -e_2 e_2 f_2 & -e_2 e_2 f_2 f_2
\end{array}. \qquad (1)$$

Як відомо [3, 6, 7] існують три класи ізоморфізмів ГЧС другої вимірності. Виберемо з цих класів по одному представнику: систему комплексних чисел $\boldsymbol{C}$, систему подвійних чисел $\boldsymbol{W}$ і систему дуальних чисел $\boldsymbol{D}$.

Як показано в роботі [6], перші два операнди в операторі подвоєння можна комутувати, оскільки одержані таблиці Келі відрізняються тільки порядком рядків *s* стовпчиків, тобто вони є ізоморфними.

З урахуванням цього досліджуваний клас ГЧС складається з шести представників класів ізоморфізмів:

1. $Д(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}, 4) = \boldsymbol{H}$ — система кватерніонів;
2. $Д(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{W}, 4) = \boldsymbol{AH}$ — система антикватерніонів;
3. $Д(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, 4) = Д(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, 4)$;
4. $Д(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}, 4)$;
5. $Д(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}, 4)$;
6. $Д(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{D}, 4) = Д(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{W}, 4)$.

Обчислювальні властивості досліджуваного класу ГЧС

Для дослідження властивостей кожної з розглядуваних ГЧС необхідно побудувати їхні таблиці Келі, які можна легко отримати, підставивши в (1) базисні елементи систем комплексних — $\boldsymbol{C}$, подвійних — $\boldsymbol{W}$ та дуальних чисел — $\boldsymbol{D}$, відповідно.

1. Система кватерніонів.

Таблиця Келі має вигляд:

H	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2
e_4	e_4	e_3	$-e_2$	$-e_1$

.

Операції додавання та множення введено таким чином:

Сумою двох кватерніонів $w_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4$ і $w_2 = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4$ є кватерніон w_3:

$$w_3 = w_1 + w_2 = (a_1 + b_1)e_1 + (a_2 + b_2)e_2 + (a_3 + b_3)e_3 + (a_4 + b_4)e_4 . \quad (2)$$

Добуток двох кватерніонів визначається за правилом:

$$w_1w_2 = (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4)e_1 + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)e_2 +$$
$$+ (a_1b_3 + a_3b_1 - a_2b_4 + a_4b_2)e_3 + (a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)e_4 .$$

Відповідно до правил додавання та множення можна виділити їхні основні властивості:

1) операція додавання комутативна: $w_1 + w_2 = w_2 + w_1$;
2) операція додавання асоціативна: $(w_1 + w_2) + w_3 = w_1 + (w_2 + w_3)$;
3) операція множення некомутативна:

$$w_1 w_2 \neq w_2 w_1;$$

4) операція множення асоціативна: $w_1(w_2 w_3) = (w_1 w_2) w_3$;
5) дистрибутивність: $w_1(w_2 + w_3) = w_1 w_2 + w_1 w_3$;
6) у даній системі визначена дія множення на скаляр $k \in R$:

$$kw_1 = ka_1 e_1 + ka_2 e_2 + ka_3 e_3 + ka_4 e_4;$$

7) для $\forall k_1, k_2 \in R$ справедливо $(k_1 w_1)(k_2 w_2) = k_1 k_2 (w_1 w_2)$.

Норма вводиться таким чином. У роботі [8] норма гіперкомплексного числа в загальному випадку визначається за формулою

$$N(w) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij}^{k} a_i, \tag{3}$$

де γ_{ij}^{k} — структурні константи гіперкомплексної числової системи, які визначаються з таблиці Келі. На цій основі будується матриця норми (3), яка для системи кватерніонів має вигляд:

$$N(w) = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Обчисливши детермінант матриці, одержимо норму кватерніона w:

$$N(w) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2.$$

Можна показати, що введена таким методом норма мультиплікативна, тобто виконується рівність:

$$N(w_1 w_2) = N(w_1) N(w_2). \tag{4}$$

Далі наведемо алгоритм визначення спряженого.

Як запропоновано у [8], означення спряженого вводиться на основі рівності

$$w\overline{w} = N(w), \tag{5}$$

Підставивши введені позначення та скориставшись таблицею Келі, і прирівнявши коефіцієнти при однакових базисних елементах, отримаємо лінійну алгебраїчну систему відносно змінних b_1, b_2, b_3, b_4.

Для кватерніонів така лінійна алгебраїчна система матиме вигляд

$$\begin{cases} a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2, \\ a_1b_2 + a_2b_1 - a_4b_3 + a_3b_4 = 0, \\ a_1b_3 + a_3b_1 - a_2b_4 + a_4b_2 = 0, \\ a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2 = 0, \end{cases} \tag{6}$$

розв'язками якої є:

$$b_1 = a_1, b_2 = -a_2, b_3 = -a_3, b_4 = -a_4. \tag{7}$$

Тому, якщо вихідний кватерніон $w = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4$, то спряжений до нього має вигляд:

$$\overline{w} = a_1e_1 - a_2e_2 - a_3e_3 - a_4e_4. \tag{8}$$

Визначимо деякі властивості спряжених кватерніонів.

1. Сума і добуток спряжених є дійсне число.

2. Спряжене до суми є сумою спряжених $\overline{w_1 + w_2} = \overline{w_1} + \overline{w_2}$.

3. Спряжене до добутку є добутком спряжених $\overline{w_1w_2} = \overline{w_1}\,\overline{w_2}$, що можна перевірити безпосередньо.

Перед тим як розглянути аналогічні властивості в інших ГЧС, варто зауважити, що:

1) в усіх системах, що розглядаються, сума двох чисел знаходиться за правилом (2). Тому, задля уникнення повторень, для інших систем наводитимемо лише правило множення, адже для кожної з них воно матиме інший вигляд, оскільки залежить від таблиці Келі;

2) властивості операцій додавання та множення, наведені вище для системи кватерніонів, аналогічні й для решти систем;

3) мультиплікативність норми виконується в усіх системах;

4) хоча лінійна алгебраїчна система (6) для визначення коефіцієнтів спряженого числа, для кожної із шести систем матиме інший вигляд, проте їхні розв'язки матимуть вигляд (7), тобто спряжене у кожній із систем має вигляд (8);

5) на відміну від системи кватерніонів (в якій за теоремою Фробеніуса відсутні дільники нуля), в інших системах вони існують, тому далі буде наведено алгоритм їхнього представлення.

2. Система антикватерніонів.

Таблиця Келі має вигляд:

AH	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	e_1	$-e_2$
e_4	e_4	e_3	e_2	e_1

.

Правило виконання операції множення.

Добуток двох антикватерніонів визначається за привилом:

$$w_1w_2 = (a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)e_1 + (a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_4 + a_4b_3)e_2 + \\ + (a_1b_3 + a_3b_1 - a_2b_4 + a_4b_2)e_3 + (a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)e_4$$

Представлення норми:

$$N(w) = a_1^{\,2} + a_2^{\,2} - a_3^{\,2} - a_4^{\,2}\,.$$

Ознака дільників нуля визначається за алгоритмом, наведеним нижче.

Відмінне від нуля гіперкомплексне число $w_1 \neq 0$ називається *дільником нуля*, якщо існує таке інше гіперкомплексне число $w_2 \neq 0$, що їхній добуток дорівнює нулю $w_1w_2 = 0$, а це означає таке ж співвідношення між їхніми псевдонормами:

$$N(w_1w_2) = 0\,. \tag{9}$$

На основі (4) псевдонорма дільника нуля повинна дорівнювати нулю:

$$N(w_1) = 0\,. \tag{10}$$

З (10) випливають ознаки дільників нуля в будь-якій з гіперкомплексних числових систем, що розглядаються.

Для системи антикватерніонів така ознака має вигляд:

$$a_1^{\,2} + a_2^{\,2} = a_3^{\,2} + a_4^{\,2}\,.$$

3. Система $Д(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, 4)$.

Таблиця Келі має вигляд:

$Д(C, D, 4)$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	0	0
e_4	e_4	e_3	0	0

Правило виконання операції множення:

$$w_1 w_2 = (a_1 b_1 - a_2 b_2) e_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) e_2 + (a_1 b_3 + a_3 b_1 - a_2 b_4 + a_4 b_2) e_3 + (a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2) e_4 .$$

Представлення норми: $N(w) = a_1^2 + a_2^2$.

Ознака дільників нуля має вигляд: $a_1^2 + a_2^2 = 0$.

4. Система $Д($ ***W***, ***W***, 4).

Таблиця Келі має вигляд:

$Д(W,W,4)$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_1	e_4	e_3
e_3	e_3	$-e_4$	e_1	$-e_2$
e_4	e_4	$-e_3$	e_2	$-e_1$

Правило виконання операції множення:

$$w_1 w_2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4) e_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_3 b_4 + a_4 b_3) e_2 +$$
$$+ (a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_2 b_4 - a_4 b_2) e_3 + (a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2) e_4$$

Представлення норми: $N(w) = a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + a_4^2$.

Ознака дільників нуля має вигляд:

$$a_1^2 + a_4^2 = a_3^2 + a_2^2 .$$

5. Система $Д($ ***D***, ***D***, 4).

Таблиця Келі має вигляд:

$Д(D,D,4)$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	0	e_4	0
e_3	e_3	$-e_4$	0	0
e_4	e_4	0	0	0

Правило виконання операції множення:

$$w_1 w_2 = a_1 b_1 e_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) e_2 + (a_1 b_3 + a_3 b_1) e_3 + (a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2) e_4 .$$

Представлення норми: $N(w) = a_1^2$.

Ознака дільників нуля має вигляд: $a_1 = 0$.

6. Система $Д(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{D}, 4)$.

Таблиця Келі має вигляд:

$Д(W, D, 4)$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_1	e_4	e_3
e_3	e_3	$-e_4$	0	0
e_4	e_4	$-e_3$	0	0

.

Правило виконання операції множення:

$$w_1 w_2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2) e_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) e_2 + \\ + (a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_2 b_4 - a_4 b_2) e_3 + (a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2) e_4$$

Представлення норми: $N(w) = a_1{}^2 - a_2{}^2$.

Ознака дільників нуля має вигляд: $a_1 = \pm a_2$.

Операція ділення

Частка від лівого ділення гіперкомплексного числа w_1 на гіперкомплексне число w_2 є розв'язок рівняння

$$w_2 x = w_1. \tag{11}$$

Щоб розв'язати рівняння (11) необхідно помножити зліва його обидві частини спочатку на $\overline{w_2}$, а потім на $\frac{1}{|w_2|^2}$, де $|w_2|^2 \neq 0$. Отримаємо:

$$x_l = \frac{1}{|w_2|^2} \overline{w_2} w_1. \tag{12}$$

Безпосередньою підстановкою (12) в рівняння (11) з'ясовуємо, що даний вираз є розв'язком цього рівняння.

Праве ділення вводимо на основі рівняння

$$x w_2 = w_1, \tag{13}$$

звідки

$$x_r = \frac{1}{|w_2|^2} w_1 \overline{w_2}\,. \tag{14}$$

Оскільки ми розглядаємо некомутативні системи, то добуток залежить від порядку співмножників, тобто $x_l \neq x_r$. Таким чином, розв'язок рівняння (11) називається *лівою часткою*, а рівняння (13) — *правою часткою* [6].

Слід зазначити, що операція ділення, на відміну від полів дійсних і комплексних чисел, не можлива не тільки на нуль, а і на дільники нуля в цих системах.

Принцип побудови представлення експоненти від гіперкомплексної змінної за допомогою асоційованої системи лінійних диференціальних рівнянь

Даний спосіб полягає в наступному [8].

Представлення експоненти в системі $\Gamma(e,n)$ від числа $M \in \Gamma(e,n)$ є частинним розв'язком гіперкомплексного лінійного диференціального рівняння

$$\dot{X} = MX \tag{15}$$

з початковою умовою

$$Exp(0) = e_1\,. \tag{16}$$

Для побудови розв'язку гіперкомплексного лінійного диференціального рівняння (19) представимо його у векторно-матричній формі. При цьому

$$\overline{\dot{X}} = (\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)^T\,, \tag{17}$$

а вектор-стовпчик $\overline{MX}$, отриманий із гіперкомплексного числа MX, можна представити у вигляді матричного добутку деякої матриці *M* вимірності $n \times n$, елементами якої є лінійні комбінації компонент гіперкомплексного числа *M*, на вектор-стовпчик $\overline{X}$:

$$\overline{MX} = M\overline{X}\,. \tag{18}$$

Тоді гіперкомплексне рівняння (15) можна представити у вигляді асоційованої системи із *n* лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\overline{\dot{X}} = M\overline{X}\,. \tag{19}$$

Далі необхідно знайти характеристичні значення $\lambda_1, ..., \lambda_n$ матриці *M*, тобто розв'язати характеристичне рівняння

$$M - \lambda E = 0. \tag{20}$$

Таким чином, характеристичні значення $\lambda_1, ..., \lambda_n$ будуть залежати від гіперкомплексного числа M.

Далі необхідно побудувати загальний розв'язок, який залежить від n^2 довільних констант, з яких $n^2 - n$ лінійно-залежні від n довільних змінних. Для отримання цих лінійних залежностей необхідно розв'язати систему лінійних рівнянь, після чого можна отримати загальний розв'язок (17), який залежить від n довільних констант — $\overline{X}(t, C_1, ..., C_n)$. Значення довільних констант встановлюється за допомогою початкової умови (16). Компоненти вектор-стовпчика розв'язку $\overline{X}$ і будуть компонентами експоненти від гіперкомплексного числа M:

$$Exp(M) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i e_i. \tag{21}$$

При побудові представлення експоненти для кожної з розглядуваних гіперкомплексних числових систем було виявлено, що в деяких з них представлення експоненти включає в себе три випадки, а в деяких — один.

1. **Система** $\boldsymbol{H}$:

$$Exp(M) = e^{m_1}\left(\cos\sqrt{m_2^2 + m_3^2 + m_4^2}\, e_1 + \frac{(m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4)}{\sqrt{m_2^2 + m_3^2 + m_4^2}} sh\sqrt{m_2^2 + m_3^2 + m_4^2}\right).$$

2. **Система** $\boldsymbol{AH}$:

1) $m_3^2 + m_4^2 - m_2^2 < 0$, $m_3^2 + m_4^2 - m_2^2 > 0$:

$$Exp(M) = e^{m_1}\left(ch\sqrt{\left|-m_2^2 + m_3^2 + m_4^2\right|}\, e_1 + \frac{(m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4)}{\sqrt{\left|-m_2^2 + m_3^2 + m_4^2\right|}} sh\sqrt{\left|-m_2^2 + m_3^2 + m_4^2\right|}\right);$$

2) $m_3^2 + m_4^2 - m_2^2 = 0$:

$$Exp(M) = e^{m_1}(e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4).$$

3. **Система** *Д*($\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, 4):

$$Exp(M) = e^{m_1}\left(\cos|m_2| e_1 + \frac{\sin|m_2|}{|m_2|}(m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4)\right).$$

4. **Система** *Д*($\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{W}$, 4):

1) $m_2^2 + m_3^2 - m_4^2 < 0$, $m_2^2 + m_3^2 - m_4^2 > 0$:

$$Exp\left(M\right)=e^{m_1}\left(ch\sqrt{\left|m_2^{\,2}+m_3^{\,2}-m_4^{\,2}\right|}e_1+\frac{\left(m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4\right)}{\sqrt{\left|m_2^{\,2}+m_3^{\,2}-m_4^{\,2}\right|}}sh\sqrt{\left|m_2^{\,2}+m_3^{\,2}-m_4^{\,2}\right|}\right);$$

2) $m_2^{\,2}+m_3^{\,2}-m_4^{\,2}=0$:

$$Exp\left(M\right)=e^{m_1}\left(e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4\right).$$

5. **Система** *Д*(***D***, ***D***, 4):

$$Exp\left(M\right)=e^{m_1}\left(e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4\right).$$

6. **Система** *Д*(***W***, ***D*** , 4):

$$Exp(M)=e^{m_1}\left(ch\left|m_2\right|e_1+\frac{sh\left|m_2\right|}{\left|m_2\right|}\left(m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4\right)\right).$$

Висновки

У роботі за допомогою некомутативної процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда систем другої вимірності побудовано шість різних некомутативних ГЧС четвертої вимірності. Досліджено їхні арифметичні та алгебраїчні властивості, що дозволяє зробити висновок про можливість їхнього використання для побудови різних математичних моделей.

Разом з тим треба підкреслити, що не можна стверджувати, що ці ГЧС є представниками *різних* класів ізоморфізмів, тобто деякі з них можуть бути ізоморфними одна одній. Це питання потребує подальших досліджень у цій галузі.

1. *Hamilton W.R.* On a new Species of imaginary Quantities connected with a Theory of Quaternions / W.R. Hamilton // Proceedings of the Royal Irish Academy. — 1844. — Vol. 2. — P. 424–434.

2. *Синьков М.В.* Гіперкомплексні числові системи: основи теорії, практичні використання, бібліографія / Синьков М.В., Боярінова Ю.Є., Каліновський Я.О., Синькова Т.В., Федоренко О.В. — К. ІПРІ НАН України. — 2009. — 44 с. — (Препринт / НАН України, Ін-т пробл. реєстрації інформації).

3. *Кантор И.Л.* Гиперкомплексные числа / И.Л.Кантор, А.С. Солодовников. — М.: Наука, 1973. — 144 с.

4. *Chaitin-Chatelin F.* Computation with Hypercomplex Numbers [Електронний ресурс] / F. Chaitin-Chatelin, T. Meskauskas, A. Zaoui. — Режим доступу: http://www.gerfacs.fr (2000).

5. *Сильвестров В.В.* Системы чисел / В.В. Сильвестров // Соросовский образовательный журнал. — 1998. — № 8. — С. 121–127.

6. *Калиновский Я.А.* Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений / Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова. — К.: Инфодрук, 2012. — 183 с.

7. *Бояринова Ю.Е.* Неканонические гиперкомплексные числовые системы размерности 2 и их изоморфизмы / Ю.Е. Бояринова // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2011. — Т. 13, № 1. — С. 29–38.

8. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Ю.Е. Бояринова, Я.А. Калиновский. — К.: Инфодрук, 2010. — 388 с.

9. *Kosal H.H.* Commutative Quaternion Matrices [Електронний ресурс] / H.H. Kosal, M. Tosun. — Режим доступу: arxiv.org/pdf/1306.6009.pdf. — 2013. — P. 13.

10. *Flaut C.*, *Shpakivskyi V.* An efficient method for solving equations in generalized quaternion and octonion algebras [Електронний ресурс] / H.H. Kosal, M. Tosun. — Режим доступу: http://arxiv.org/pdf/1405.5652.pdf. — 2014. — P. 15.

Надійшла до редакції 11.09.2014