УДК 004.942

А. С. Туренко
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Дослідження обчислювальних властивостей системи антикватерніонів

Представлено продовження досліджень однієї із некомутативних гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності — системи антикватерніонів. Побудовано представлення експоненти від антикватерніонної змінної двома методами: за допомогою процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда та асоційованої системи лінійних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: *антикватерніон, гіперкомплексна числова система, експонента, процедура подвоєння Грасмана-Кліфорда.*

Вступ

Гіперкомплексні числові системи (ГЧС) знаходять все більше застосувань у математичному моделюванні, зокрема, для вирішення таких практичних задач: навігації та управління рухомими об'єктами, в механіці, електродинаміці, криптографії, цифрової обробки сигналів тощо. Важливу роль відіграють функції від гіперкомплексних змінних, використання представлень яких дозволяє підвищити ефективність як обчислювальних процедур, так і синтезу самих математичних моделей.

Побудовано представлення даних функцій для багатьох гіперкомплексних числових систем, але для системи антикватерніонів представлення таких функцій ще не побудовано. Тому доцільно побудувати представлення експоненти для цієї системи, яка є некомутативною.

Постановка задачі

У роботі [3] розроблено метод і побудовано представлення експоненти від кватерніонної змінної за допомогою асоційованої системи лінійних диференціальних рівнянь. У роботі [6] антикватерніони розглядаються як результат застосування до системи комплексних чисел процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда системою подвійних чисел. Вивчаються арифметичні та алгебраїчні властивості антикватерніонів.

Числа виду $w = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4$, де $a_i \in R$, $i = 0,1,2,3$, e_1, e_2, e_3, e_4 — уявні одиниці, називаються *атникватерніонами*, якщо виконуються властивості:

1. $e_2^{\ 2} = -1, e_3^{\ 2} = 1, e_4^{\ 2} = 1;$
2. $e_2e_3 = -e_3e_2 = e_4$, $e_4e_2 = -e_2e_4 = e_3$, $e_3e_4 = -e_4e_3 = -e_2$.

Правила множення базисних елементів можна представити у вигляді таблиці

AH	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	e_1	$-e_2$
e_4	e_4	e_3	e_2	e_1

або через оператор подвоєння

$$AH = Д\left(C(\mathrm{e},2), W(f,2)\right).$$

Методи побудови представлення експоненти в ГЧС

Гіперкомплесним числовим системам і побудові нелінійностей від них присвячено чимало робіт. Так, у роботі [1] побудовано представлення експоненти від гіперкомплексних змінних шляхом застосування процедури Грасмана-Кліфорда.

Ще один спосіб побудови нелінійностей представлено в роботі [3], який полягає в наступному.

Представлення експоненти в системі $\Gamma(e,n)$ від числа $M \in \Gamma(e,n)$ є частинним розв’язком гіперкомплексного лінійного диференціального рівняння

$$\dot{X} = MX \tag{1}$$

з початковою умовою

$$Exp(0) = e_1. \tag{2}$$

Для побудови розв’язку гіперкомплексного лінійного диференціального рівняння (1) представимо його у векторно-матричній формі. При цьому

$$\dot{\overline{X}} = \left(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n\right)^r, \tag{3}$$

а вектор-стовпчик $\overline{MX}$, отриманий із гіперкомплексного числа MX, можна представити у вигляді матричного добутку деякої матриці M вимірності $n \times n$, елементами якої є лінійні комбінації компонент гіперкомплексного числа M, на вектор-стовпчик $\overline{X}$:

$$\overline{MX} = M\overline{X}\,. \tag{4}$$

Тоді гіперкомплексне рівняння (1) можна представити у вигляді асоційованої системи із n лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\dot{\overline{X}} = M\overline{X}\,. \tag{5}$$

Далі необхідно знайти характеристичні значення $\lambda_1,...,\lambda_n$ матриці M, тобто розв'язати характеристичне рівняння

$$M - \lambda E = 0\,. \tag{6}$$

Таким чином, характеристичні значення $\lambda_1,...,\lambda_n$ будуть залежати від гіперкомплексного числа M.

Далі необхідно побудувати загальний розв'язок, який залежить від n^2 довільних констант, з яких $n^2 - n$ лінійно-залежні від n довільних змінних. Для отримання цих лінійних залежностей необхідно розв'язати систему лінійних рівнянь, після чого можна отримати загальний розв'язок (5), який залежить від n довільних констант — $\overline{X}(t, C_1,...,C_n)$. Значення довільних констант встановлюється за допомогою початкової умови (2). Компоненти вектор-стовпчика розв'язку $\overline{X}$ і будуть компонентами експоненти від гіперкомплексного числа M:

$$Exp(M) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i e_i\,. \tag{7}$$

Побудова представлення експоненти від антикватерніонної змінної методом застосування процедури Грасмана-Кліфорда

Розглянемо систему антикватерніонів, елементи якої, згідно означення, мають вигляд:

$$w = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4\,.$$

Оскільки дана система є результатом антикомутативного подвоєння системи комплексних чисел системою подвійних чисел, то довільний антикватерніон може бути представлений як подвійне число

$$w = a_1e_1 + \frac{a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4}{\sqrt{\left|-a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + a_4^{\,2}\right|}}\sqrt{\left|-a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + a_4^{\,2}\right|}\,, \tag{8}$$

причому $-a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + a_4^{\,2} \neq 0$.

Введемо деякі позначення у формулі (8), а саме:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = A_0,\\
&\frac{a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4}{\sqrt{\left|-a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + a_4^{\,2}\right|}} = I,\\
&\sqrt{\left|-a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + a_4^{\,2}\right|} = A_1.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Згідно позначень (9), антикватерніон (8) матиме вигляд:

$$
w = A_0e_1 + A_1I\,. \tag{10}
$$

У такому вигляді він зберігає властивості подвійного числа, а саме:

$$
|w|^2 = A_0^{\,2} - A_1^{\,2} = a_1 + a_2^{\,2} - a_3^{\,2} - a_4^{\,2},\; I^2 = 1\,.
$$

Цей метод дозволяє отримати представлення елементарних функцій антикватерніонної змінної в три кроки:

1) заміна антикватерніона подвійним числом;
2) розкриття функції;
3) зворотня заміна позначень:

$$
\begin{aligned}
&A_0 \to a_1,\\
&I \to \frac{a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4}{\sqrt{\left|-a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + a_4^{\,2}\right|}},\\
&A_1 \to \sqrt{\left|-a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + a_4^{\,2}\right|}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Застосуємо даний алгоритм для побудови представлення експоненти:

$$
e^w = e^{A_1e_1 + A_2I} = e^{A_1e_1}e^{A_2I} = e^{A_1e_1}\left(1 + A_2I + \frac{(A_2I)^2}{2!} + \frac{(A_2I)^3}{3!} + \frac{(A_2I)^4}{4!} + \dots\right) =
$$

$$
= e^{A_1e_1}\left(1 + A_2I + \frac{A_2^{\,2}}{2!} + \frac{A_2I^3}{3!} + \frac{A_2^{\,4}}{4!} + \frac{A_2I^5}{5!} + \frac{A_2^{\,6}}{6!}\dots\right) =
$$

$$
= e^{A_1e_1}\left(1 + \frac{A_2^{\,2}}{2!} + \frac{A_2^{\,4}}{4!} + \frac{A_2^{\,6}}{6!}\dots + I\left(A_2 + \frac{A_2^{\,3}}{3!} + \frac{A_2^{\,5}}{5!} + \dots\right)\right) = e^{A_1e_1}(shA_2 + IchA_2).
$$

Застосувавши перетворення (11), отримаємо остаточне представлення еспоненти від антикватерніонної змінної:

$$
e^w = e^{a_1e_1}\left(sh\sqrt{\left|-a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + a_4^{\,2}\right|} + \frac{a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4}{\sqrt{\left|-a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + a_4^{\,2}\right|}}ch\sqrt{\left|-a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + a_4^{\,2}\right|}\right). \tag{12}
$$

Побудова представлення експоненти від антикватерніонної змінної за допомогою асоційованої системи лінійних диференціальних рівнянь

Згідно алгоритму, наведеному вище, розглянемо систему антикватерніонів $AH(e,4)$. Побудуємо в ній представлення експоненти від числа $M \in AH(e,4)$.

Рівняння (1) можна записати у вигляді:

$$\frac{dX}{dt} = MX\,. \tag{13}$$

Обчислимо праву частину рівняння (13). Відповідно до таблиці множення для антикватерніонів $M = m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4$ та $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$ отримаємо:

$$\begin{aligned} MX &= (m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4)(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4) = \\ &= (m_1x_1 - m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4)e_1 + (m_1x_2 + m_2x_1 - m_3x_4 + m_4x_3)e_2 + \\ &+ (m_1x_3 - m_2x_4 + m_3x_1 + m_4x_2)e_3 + (m_1x_4 + m_2x_3 - m_3x_2 + m_4x_1)e_4 \end{aligned} \tag{14}$$

Згідно рівності (14), рівняння (13) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= (m_1x_1 - m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4)e_1 + (m_2x_1 + m_1x_2 + m_4x_3 - m_3x_4)e_2 + \\ &+ (m_3x_1 + m_4x_2 + m_1x_3 - m_2x_4)e_3 + (m_4x_1 - m_3x_2 + m_2x_3 + m_1x_4)e_4 \end{aligned} \tag{15}$$

Звідси можна записати асоційовану систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = m_1x_1 - m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = m_2x_1 + m_1x_2 + m_4x_3 - m_3x_4, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = m_3x_1 + m_4x_2 + m_1x_3 - m_2x_4, \\ \dfrac{dx_4}{dt} = m_4x_1 - m_3x_2 + m_2x_3 + m_1x_4. \end{cases} \tag{16}$$

Для розв'язку системи (16) необхідно знайти корені характеристичного рівняння (6), де $M = \begin{pmatrix} m_1 & -m_2 & m_3 & m_4 \\ m_2 & m_1 & m_4 & -m_3 \\ m_3 & m_4 & m_1 & -m_2 \\ m_4 & -m_3 & m_2 & m_1 \end{pmatrix}$; E — одинична матриця.

З урахуванням вищесказаного, характеристичне рівняння матиме вигляд:

$$\begin{vmatrix} m_1-\lambda & -m_2 & m_3 & m_4 \\ m_2 & m_1-\lambda & m_4 & -m_3 \\ m_3 & m_4 & m_1-\lambda & -m_2 \\ m_4 & -m_3 & m_2 & m_1-\lambda \end{vmatrix} = 0 . \qquad (17)$$

Обчисливши (17), отримаємо таке рівняння:

$$\left((m_1-\lambda)^2 - m_3{}^2 + m_2{}^2 - m_4{}^2\right)^2 = 0 . \qquad (18)$$

З рівності (18) можна легко знайти характеристичні значення:

$$\lambda_{1,2,3,4} = m_1 \pm \sqrt{m_3{}^2 + m_4{}^2 - m_2{}^2} . \qquad (19)$$

Як бачимо, вони можуть бути різними залежно від того, який знак має підкореневий вираз.

Розглянемо окремі випадки.

1. $m_3{}^2 + m_4{}^2 - m_2{}^2 < 0$.

Введемо позначення:

$$\overline{m} = \sqrt{m_3{}^2 + m_4{}^2 - m_2{}^2} . \qquad (20)$$

У цьому випадку матимемо кратні комплексно спряжені корені характеристичного рівняння, тобто:

$$\lambda_{1,2,3,4} = m_1 \pm i\sqrt{m_2{}^2 - m_3{}^2 - m_4{}^2} .$$

Для зручності введемо ще одне позначення:

$$\overline{\overline{m}} = \sqrt{m_2{}^2 - m_3{}^2 - m_4{}^2} . \qquad (21)$$

Тоді корені характеристичного рівняння (17) матимуть вигляд:

$$\lambda_{1,2,3,4} = m_1 \pm i\overline{\overline{m}} . \qquad (22)$$

Згідно (22) розв'язок системи (16) шукається в такій формі:

$$X_k(t) = e^{m_1 t}\left((A_k + B_k t)\cos\overline{\overline{m}}t + (C_k + D_k t)\sin\overline{\overline{m}}t\right), k = 1,...,4 . \qquad (23)$$

Обчислюємо першу похідну:

$$\frac{dX_k(t)}{dt} = e^{m_1 t}\left(\left(m_1 A_k + B_k + \overline{\overline{m}} C_k + \left(m_1 B_k + \overline{\overline{m}} D_k\right)\, t\right)\cos \overline{\overline{m}} t + \right.$$
$$\left. + \left(m_1 C_k + D_k - \overline{\overline{m}} A_k + \left(m_1 D_k + \overline{\overline{m}} B_k\right)\, t\right)\sin \overline{\overline{m}} t\right), k = 1,\ldots,4. \tag{24}$$

Якщо підставимо рівності (23) та (24) в асоційовану систему (16) і використаємо метод неозначених коефіцієнтів, отримаємо систему 16-ти рівнянь з 16-ма невідомими, яку можна звести до векторно-матричної системи, якщо ввести такі позначення:

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & -m_2 & m_3 & m_4 \\ m_2 & 0 & m_4 & -m_3 \\ m_3 & m_4 & 0 & -m_2 \\ m_4 & -m_3 & m_2 & 0 \end{vmatrix},\ \overline{A} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix},\ \overline{B} = \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{vmatrix},\ \overline{C} = \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{vmatrix},\ \overline{D} = \begin{vmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{vmatrix}.$$

Матриця Q має таку властивість:

$$QQ = -\overline{\overline{m}}^2 E, \tag{25}$$

де E — одинична матриця.

Використавши такі позначення, векторно-матрична система матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} \overline{B} + \overline{\overline{m}}\overline{C} = Q\overline{A}, \\ \overline{\overline{m}}\overline{D} = Q\overline{B}, \\ -\overline{\overline{m}}\overline{A} + \overline{D} = Q\overline{C}, \\ -\overline{\overline{m}}\overline{B} = Q\overline{D}. \end{cases} \tag{26}$$

Якщо 4-те рівняння помножити на матрицю Q, то $-\overline{\overline{m}}Q\overline{B} = QQ\overline{D}$, якщо скористатися співвідношенням (25) і скоротити на $\overline{\overline{m}}$, то отримаємо 2-ге рівняння. Це означає, що 2-ге та 4-те рівняння лінійно залежні, із 2-го рівняння виразимо $\overline{D}$ через $\overline{B}$: $\overline{D} = \frac{1}{\overline{\overline{m}}} Q\overline{B}$ і підставимо в 3-тє рівняння, 1-ше рівняння помножимо зліва на Q. З урахуванням (25) отримаємо таку систему:

$$\begin{cases} Q\overline{B} + \overline{\overline{m}}Q\overline{C} = QQ\overline{A}, \\ -\overline{\overline{m}}\overline{A} + \frac{1}{\overline{\overline{m}}}\overline{B}Q = Q\overline{C}. \end{cases}$$

Сума рівнянь даної системи дасть нам рівняння $2Q\overline{B}=0$, з якого випливає

$$\overline{B}=\overline{D}=0, \tag{27}$$

тобто

$$\overline{B}=\begin{vmatrix}0\\0\\0\\0\end{vmatrix},\ \overline{D}=\begin{vmatrix}0\\0\\0\\0\end{vmatrix}.$$

Тоді, якщо підставимо (27) в 1-ше рівняння системи (26), то отримаємо, що A — довільна,

$$\overline{C}=\frac{1}{\overline{\overline{m}}}Q\overline{A}. \tag{28}$$

Із урахуванням (27) та (28) загальний розв'язок (23) буде мати векторно-матричний вигляд:

$$\overline{X}(t)=e^{m_1 t}\left(\overline{A}\cos\left(\overline{\overline{m}}t\right)+\frac{1}{\overline{\overline{m}}}Q\overline{A}\sin\left(\overline{\overline{m}}t\right)\right). \tag{29}$$

У цей вираз входить довільний вектор-стовпчик, який складається із 4-х констант інтегрування. Для їхнього визначення використаємо початкову умову (2), яку можна записати у вигляді

$$Exp(0)=1\cdot e_1+0\cdot e_2+0\cdot e_3+0\cdot e_4. \tag{30}$$

Тобто, повинно бути:

$$\overline{X}(0)=\begin{vmatrix}1\\0\\0\\0\end{vmatrix}. \tag{31}$$

Підставивши (31) в (23), маємо:

$$A_1=1,\ \ A_2=0,\ \ A_3=0,\ \ A_4=0. \tag{32}$$

Розв'язок системи можна отримати, якщо підставити значення A_1, A_2, A_3, A_4 в (23):

$$\begin{cases} x_1 = e^{m_1 t}\cos\left(\overline{\overline{m}}t\right), \\ x_2 = \dfrac{m_2}{\overline{\overline{m}}}e^{m_1 t}\sin\left(\overline{\overline{m}}t\right), \\ x_3 = \dfrac{m_3}{\overline{\overline{m}}}e^{m_1 t}\sin\left(\overline{\overline{m}}t\right), \\ x_4 = \dfrac{m_4}{\overline{\overline{m}}}e^{m_1 t}\sin\left(\overline{\overline{m}}t\right). \end{cases} \tag{33}$$

За допомогою загальних розв'язків можна записати експоненціальну функцію від антикватерніонної змінної, якщо прийняти $m_i t \approx m_i$:

$$Exp(M) = e^{m_1}\left(\cos\overline{\overline{m}} + \frac{\sin\overline{\overline{m}}}{\overline{\overline{m}}}\left(m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4\right)\right) =$$

$$= e^{m_1}\left(\cos\left(i\sqrt{\left|-m_2^2 + m_3^2 + m_4^2\right|}\right)e_1 - \frac{i\sin\left(i\sqrt{\left|-m_2^2 + m_3^2 + m_4^2\right|}\right)}{\sqrt{\left|-m_2^2 + m_3^2 + m_4^2\right|}}\left(m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4\right)\right).$$

Використовуючи зв'язки тригонометричних функцій з гіперболічними можемо записати:

$$Exp(M) = e^{m_1}\left(ch\sqrt{\left|-m_2^2 + m_3^2 + m_4^2\right|}e_1 + \frac{sh\sqrt{\left|-m_2^2 + m_3^2 + m_4^2\right|}}{\sqrt{\left|-m_2^2 + m_3^2 + m_4^2\right|}}\left(m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4\right)\right). \tag{34}$$

2. $m_3^2 + m_4^2 - m_2^2 > 0$.

У цьому випадку матимемо два кратних дійсних кореня:

$$\lambda_{1,2,3,4} = m_1 \pm \overline{m}. \tag{35}$$

Розв'язок системи (16) шукається в такій формі:

$$\begin{aligned} X_k(t) &= e^{(m_1+\overline{m})t}\left(A_k + B_k t\right) + e^{(m_1-\overline{m})t}\left(C_k + D_k t\right) = \\ &= e^{m_1 t}\left(e^{\overline{m}t}\left(A_k + B_k t\right) + e^{-\overline{m}t}\left(C_k + D_k t\right)\right),\ k = 1,\ldots,4. \end{aligned} \tag{36}$$

Обчислюємо першу похідну:

$$\frac{dX_k(t)}{dt} = e^{m_1 t}\left(e^{\overline{m}t}\left(\left(A_k + B_k t\right)\left(m_1 + \overline{m}\right) + B_k\right) + e^{-\overline{m}t}\left(\left(C_k + D_k t\right)\left(m_1 - \overline{m}\right) + D_k\right)\right), \quad k = 1, ..., 4. \tag{37}$$

Аналогічно як і в першому випадку, підставимо рівності (36) та (37) в асоційовану систему (16) і використаємо метод неозначених коефіцієнтів. У результаті отримаємо систему 16-ти рівнянь з 16-ма невідомими, розв'язавши яку матимемо такі загальні розв'зки:

$$\begin{cases} x_1 = e^{(m_1+\overline{m})t}\left(\dfrac{m_3\overline{m} - m_2 m_4}{m_4^{\ 2} + m_3^{\ 2}} A_3 + \dfrac{m_4\overline{m} + m_2 m_3}{m_4^{\ 2} + m_3^{\ 2}} A_4\right) + \\ \quad + e^{(m_1-\overline{m})t}\left(\dfrac{-m_3\overline{m} - m_2 m_4}{m_4^{\ 2} + m_3^{\ 2}} C_3 + \dfrac{-m_4\overline{m} + m_2 m_3}{m_4^{\ 2} + m_3^{\ 2}} C_4\right), \\ x_2 = e^{(m_1+\overline{m})t}\left(\dfrac{m_4\overline{m} + m_2 m_3}{m_4^{\ 2} + m_3^{\ 2}} A_3 + \dfrac{m_2 m_4 - m_3\overline{m}}{m_4^{\ 2} + m_3^{\ 2}} A_4\right) + \\ \quad + e^{(m_1-\overline{m})t}\left(\dfrac{-m_4\overline{m} + m_2 m_3}{m_4^{\ 2} + m_3^{\ 2}} C_3 + \dfrac{m_2 m_4 + m_3\overline{m}}{m_4^{\ 2} + m_3^{\ 2}} C_4\right), \\ x_3 = e^{(m_1+\overline{m})t} A_3 + e^{(m_1-\overline{m})t} C_3, \\ x_4 = e^{(m_1+\overline{m})t} A_4 + e^{(m_1-\overline{m})t} C_4. \end{cases} \tag{38}$$

Для знаходження значень довільних констант використаємо рівність (30):

$$A_1 = \frac{1}{2},\ A_2 = \frac{1}{2}\frac{m_2}{\overline{\overline{m}}},\ A_3 = \frac{1}{2}\frac{m_3}{\overline{\overline{m}}},\ A_4 = \frac{1}{2}\frac{m_4}{\overline{\overline{m}}},\ B_1 = 0,\ B_2 = 0,\ B_3 = 0,\ B_4 = 0,$$

$$C_1 = \frac{1}{2},\ C_2 = -\frac{1}{2}\frac{m_2}{\overline{\overline{m}}},\ C_3 = -\frac{1}{2}\frac{m_3}{\overline{\overline{m}}},\ C_4 = -\frac{1}{2}\frac{m_4}{\overline{\overline{m}}},\ D_1 = 0,\ D_2 = 0,\ D_3 = 0,\ D_4 = 0.$$

Отже, можемо записати загальні розв'язки, за допомогою яких отримаємо представлення експоненти від антикватерніонної змінної, прийнявши $m_i t \approx m_i$:

$$Exp(M) = e^{m_1}\left(\mathrm{ch}\sqrt{-m_2^{\ 2} + m_3^{\ 2} + m_4^{\ 2}} + \frac{\left(m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4\right)}{\sqrt{-m_2^{\ 2} + m_3^{\ 2} + m_4^{\ 2}}}\mathrm{sh}\sqrt{-m_2^{\ 2} + m_3^{\ 2} + m_4^{\ 2}}\right). \tag{39}$$

Оскільки ми розглядаємо випадок, коли підкореневий вираз більший нуля, то можемо переписати (39) у вигляді:

$$Exp(M)=e^{m_1}\left(ch\sqrt{\left|-m_2^{\,2}+m_3^{\,2}+m_4^{\,2}\right|}e_1+\frac{sh\sqrt{\left|-m_2^{\,2}+m_3^{\,2}+m_4^{\,2}\right|}}{\sqrt{\left|-m_2^{\,2}+m_3^{\,2}+m_4^{\,2}\right|}}\left(m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4\right)\right).\quad(40)$$

3. $m_3^{\,2}+m_4^{\,2}-m_2^{\,2}=0$.

У цьому випадку матимемо один кратний дійсний корінь:

$$\lambda_{1,2,3,4}=m_1.\quad(41)$$

Враховуючи (41), розв'язок асоційованої системи (16) шукається в такій формі:

$$X_k(t)=e^{(m_1+\overline{m})t}\left(A_k+B_kt+C_kt^2+D_kt^3\right),k=1,...,4.\quad(42)$$

Обчислюємо першу похідну:

$$\frac{dX_k(t)}{dt}=e^{m_1t}\left(m_1A_k+B_k+\left(m_1B_k+2C_k\right)t+\left(m_1C_k+3D_k\right)t^2+m_1D_kt^3\right),k=1,...,4.\quad(43)$$

Знову ж таки, як і в попередніх випадках, підставимо рівності (42) та (43) в асоційовану систему (16) і, використавши метод неозначених коефіцієнтів, отримаємо систему 16-ти рівнянь з 16-ма невідомими, розв'завши яку отримаємо такі загальні розв'зки:

$$\begin{cases} x_1=e^{m_1t}\left(-\dfrac{m_4}{m_2}A_3+\dfrac{m_3}{m_2}A_4+\dfrac{m_3}{m_2^{\,2}}B_3+\dfrac{m_4}{m_2^{\,2}}B_4+\left(-\dfrac{m_4}{m_2}B_3+\dfrac{m_3}{m_2}B_4\right)t\right),\\ x_2=e^{m_1t}\left(\dfrac{m_3}{m_2}A_3+\dfrac{m_4}{m_2}A_4+\dfrac{m_4}{m_2^{\,2}}B_3-\dfrac{m_3}{m_2^{\,2}}B_4+\left(\dfrac{m_3}{m_2}B_3+\dfrac{m_4}{m_2}B_4\right)t\right),\\ x_3=e^{m_1t}\left(A_3+B_3t\right),\\ x_4=e^{m_1t}\left(A_4+B_4t\right).\end{cases}\quad(44)$$

Для знаходження значень довільних констант використаємо рівність (30), матимемо:

$$\begin{array}{llll} A_1=1, & B_1=0, & C_1=0, & D_1=0,\\ A_2=0, & B_2=m_2, & C_2=0, & D_2=0,\\ A_3=0, & B_3=m_3, & C_3=0, & D_3=0,\\ A_4=0, & B_4=m_4, & C_4=0, & D_4=0.\end{array}$$

Таким чином, представлення експоненти від антикватерніонної змінної буде мати вигляд:

$$Exp(M) = e^{m_1}(e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4). \quad (45)$$

Висновки

Порівнявши отримані результати (34), (40) та (45), бачимо, що представлення есспоненти для двох перших випадків співпадає. Якщо спрямувати для них підкореневий вираз рівності (20) до нуля, то отримаємо представлення експоненти для третього випадку.

Порівнюючи результати, отримані за допомогою розглядуваних методів, можна зробити такий висновок: оскільки представлення експоненти для обох методів має однаковий вигляд, то можна говорити про правильність дослідження.

Отже, в системі антикватерніонів побудовано представлення експоненти двома методами. Перший з них полягає в застосуванні процедури Грасмана-Кліфорда, а другий — за допомогою асоційованої системи лінійних диференціальних рівнянь. Дані представлення дадуть змогу використовувати дану систему в математичному моделюванні.

Доцільно також дослідити представлення інших функції від антикватерніонів, таких, як логарифмічна, тригонометричні та гіперболічні функції, що буде предметом подальших наукових досліджень.

1. *Каратаев Е.А.* Элементарные функции матриц / Е.А. Каратаев. — М.: Фантазия. — 2002. — 40 с.

2. *Калиновский Я.А.* Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их применения / Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова. — К.: Инфодрук, 2012. — 182 с.

3. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Ю.Е. Бояринова, Я.А. Калиновский. — К.: Инфодрук, 2010. — 388 с.

4. *Построение* некоторых функций в гиперкомплексной числовой системе 4-го порядка / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова, А.В. Федоренко // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2006. — Т. 8, № 1. — С. 9–16.

5. *Синьков М. В.* Представления экспонент в изоморфных гиперкомплексных числовых системах / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2011. — Т. 13, № 2. — С. 27–37.

6. *Туренко А.С.* Дослідження властивостей одного узагальнення гіперкомплексної системи кватерніонів / А.С. Туренко // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2014. — Т. 16, № 1. — С. 19–27.

7. *Casanova Gaston.* Fonctions Analytiques / Gaston Casanova. — Advances in Applied Clifford Algebras. — 2004. — Vol. 14. — N 2. — P. 249–252.

Надійшла до редакції 20.05.2014