

О. Г. Додонов, Д. В. Ланде

Інститут проблем реєстрації інформації НАН України  
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

## Мережева модель структурної живучості

*Описано мережеві моделі систем і досліджено їхню структурну живучість. Запропоновано підхід до оцінки живучості системи. Ця оцінка відповідає величині найбільшої зв'язної компоненти мережі моделі після деструктивного впливу на неї. Вона більш складна, ніж індекс структурної живучості, що застосовується до теперішнього часу, в якому враховується тільки зв'язність мережі. В роботі вивчаються мережі з різною топологією, в яких випадковим чином видаляються окремі ланки. Введений у роботу показник залежить від топології мережі і її розмірів, який з високою точністю апроксимується кубічними многочленами.*

**Ключові слова:** моделювання живучості, структурна живучість, канонічна живучість, мережева модель, компонента зв'язності, індекс живучості.

### Вступ

Живучість — це фундаментальна властивість системи, її здатність адаптуватися до нових непередбачуваних умов функціонування, протистояння небажаним впливам при реалізації основної функції. Існують багато аспектів живучості систем, серед яких можна назвати структурну, функціональну, інформаційну та ін. живучості. Ця робота присвячена моделюванню структурної живучості систем, самі системи при цьому моделюються як мережеві структури. У багатьох випадках живучість описується як якісна властивість, що не піддається точному кількісному опису. Одне із завдань роботи — дати чітку кількісну оцінку живучості, причому більш досконалу, ніж так звана канонічна живучість.

Структурна живучість розглядається як властивість системи зберігати свою функціональність при пасивній протидії пошкодженням окремих елементів. В окремому випадку, коли заданий процес руйнування елементів, структурна живучість розглядається як структурна надійність. Критерій структурної надійності — це число відмов елементів, що не порушують працездатність систем, у разі відмови будь-яких  $k$  елементів системи [1].

## 1. Загальноприйняті моделі

Схема функціонування складної системи може бути задана за допомогою мережі, сукупності вузлів і зв'язків, яка визначає фізичну структуру цієї системи. У загальноприйнятих моделях [2] вважається, що видалення всіх зв'язків, інцидентних деякому вузлу, ізолює його, перериваючи всі шляхи до інших вузлів — мережа стає незв'язною, живучість мережі — рівною нулю.

У цій роботі приймається інший критерій — пороговий, а саме, розглядається розмір розмір найбільшої зв'язної компоненти мережі. Можливість підключення всієї мережі може бути порушена, але система залишається функціонально здатною, якщо відповідна максимальна зв'язкова компонента за обсягом (кількістю вузлів) перевищує деякий заданий заздалегідь поріг.

Звичайно, виходячи з цього критерію, найбільш живучим завжди буде повний граф, однак, не є очевидним, яка з мереж з однаковою кількістю зв'язків, наприклад мережі Ердеша-Рен'ї, Барабаіші-Альберт, мережі малого світу або квазіієрархічні будуть більш структурно живучими. З'ясування цих фактів можуть мати велике значення, наприклад, при побудові систем безпеки або систем організаційного управління.

У представленій роботі досліджується, як варіюється ймовірність виходу з ладу всієї системи від імовірності видалення окремих зв'язків у мережі, що відповідає системі, для мереж з різними (стандартними) топологіями, ранжувати ці топології за рівнем структурної живучості.

У роботах [3, 4] пропонується канонічне визначення коефіцієнта живучості, при якому ніяке руйнування ребер не приводить до втрати зв'язності. Канонічна живучість мережі  $R(G, p)$  визначається як імовірність того, що  $G$  залишиться зв'язною після того, як кожний зв'язок (ребро) буде видалений з однаковою ймовірністю  $p = R(G, p)$ . Канонічну живучість можна розрахувати за допомогою перерахування остовів  $G$ . На практиці це визначення тісно пов'язано з многочленом Татта-Уїтні (Tutte-Whitney) [5], який є інваріантом у теорії графів.

При цьому точний розрахунок канонічної живучості системи являє собою  $NP$ -складну задачу, витрати на вирішення якої зростають експоненційно з ростом числа вузлів і зв'язків, так як для розрахунку живучості полінома графа, що складається з  $n$  ребер, необхідно пройтися по всіх остовних підграфів графа  $G$  [6]. Тому в багатьох роботах пропонуються альтернативні наближені підходи для оцінки живучості систем [7].

**Многочлен Татта-Уїтні** — многочлен від двох змінних, що грає велику роль у теорії графів; визначений для будь-якого неорієнтованого графа та містить інформацію, наскільки граф зв'язний. Многочлен Татта-Уїтні — найбільш загальна характеристика, що описує комбінаторні властивості графа.

Стандартне позначення многочлена —  $T_G$ . Многочлен Татта-Уїтні для неорієнтованого графа  $G = (V, E)$  визначається як

$$T_G(x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{k(A)-k(E)} (y-1)^{k(A)+|A|-|V|},$$

де  $k(A)$  означає число компонент зв'язності графа  $(V, A)$ . З визначення видно, що многочлен  $T_G$  цілком визначений і поліноміален по  $x$  та по  $y$ .

Для будь-якого графа вірно:

- 1)  $T_G(1,1)$  дорівнює кількості остовних лісів;
- 2)  $T_G(1,2)$  дорівнює кількості підграфів  $G$ , що мають стільки ж компонент зв'язності, що і  $G$ ;
- 3)  $T_G(2,1)$  дорівнює кількості ациклічних підграфів  $G$ .

Досить просто многочлени Татта-Уїтні розраховуються для найпростіших «регулярних» мережевих структур, наведемо відомі результати.

*Многочлен Татта-Уїтні дерева.*

Нехай  $G$  — дерево з  $n$  вершинами. Тоді  $T_G(x, y) = x^{n-1}$ .

*Многочлен Татта-Уїтні циклу.*

Нехай  $G = Z^n$  — цикл з  $n$  вершин. Тоді  $T_{Z_n}(x, y) = y + x + \dots + x^{n-1}$ .

*Многочлен Татта-Уїтні повного графу:*

$$F_n(x, y) = \sum_{k=1}^n C_{k-1}^{n-1} (x + y + y^2 + \dots + y^{k-1}) F_{k-1}(1, y) F_{n-k}(x, y).$$

Канонічна живучість  $R(G, p)$  визначається як імовірність того, що  $G$  залишиться зв'язною після того, як кожне ребро буде видалено з однаковою ймовірністю  $p$ . Канонічну живучість  $R(G, p)$  можна розрахувати за допомогою перерахування кістяків  $G$ . На практиці це тісно пов'язано з поліномом Татта-Уїтні, який безпосередньо пов'язаний з канонічною живучістю. В цьому випадку многочлен живучості — це функція  $R_G(p)$ , многочлен від  $p$ , який дає можливість, що будь-яка пара вершин у  $G$  залишається зв'язною після випадання ребра. Зв'язок з многочленом Татта-Уїтні задається рівністю

$$R_G(p) = (1-p)^{|V|-k(G)} p^{|E|-|V|+k(G)} T_G\left(1, \frac{1}{p}\right).$$

Переваги такої постановки очевидні: запропонована процедурна модель універсальна і застосовна до будь-яких графів.

При цьому точний розрахунок загальної живучості системи являє собою  $NP$ -складну задачу, витрати на вирішення якої зростають експоненціально з ростом числа вузлів і зв'язків.

Для розрахунку живучості полінома графа, що складається з  $n$  ребер, необхідно пройти підграфами, тобто всіма основними підграфами графа  $G$ , множина ребер яких представляє собою усі можливі вибірки поєднань з  $n$  ребер графа  $G$ . Тому в багатьох роботах пропонуються інші альтернативи для оцінки живучості систем, зокрема, моделі на основі штучної нейронної мережі [7]. Нейронні мережі мають високу швидкодію за рахунок використання масового паралелізму обробки інформації. На відміну від такого підходу, який, безумовно, заслуговує на увагу, в даній роботі пропонується підхід, який базується на імітаційному моделюванні.

## 2. Метод, що пропонується

До розгляду пропонується наступний підхід до моделювання живучості системи.

1. Модель системи — граф, що складається з вузлів і зв'язків (ненаправлених)  $S = (V, E)$ . Вузли — однорідні функціональні компоненти.

2. «Потужність» системи — кількість вузлів у найбільшій зв'язковий компоненті  $V_s$ .

3. Система знаходиться в стані «жива», функціонально здатна, якщо питома «потужність» системи не менше деякого порогу  $\tau$ , тобто  $|V_s|/|V_0| \geq \tau$ , де  $V_0$  — первинний розмір мережі.

На зв'язки мережі проводиться деструктивний вплив. Кожен зв'язок може бути видалений з імовірністю  $p$ .

Для кожної конкретної системи можна визначити міру живучості системи при заданому порозі  $\tau$ , тобто ймовірність видалення окремих елементів (зв'язків)  $p^*$ , при якій система виходить зі стану «жива», тобто  $|V_s|/|V_0| < \tau$ .

### 3. Еталонні мережі

Для моделювання як приклад досліджуються три артефактних мережі, а саме, мережі Барабаші-Альбер, Ердеша-Рен`ї та Уаттса-Строгатца. Ці мережі можуть розглядатись як прототипи багатьох реальних мереж.

#### 3.1. Мережа «переважного приєднання»

Більшості реальних артефактних мереж притаманний степеневий закон розподілу ступенів вузлів. Виявилось, що такий розподіл пояснюється ефектом під назвою «кумулятивна перевага» (cumulative advantage) або переважне приєднання (preferential attachment). До мереж з переважним розподілом відносяться мережі Барабаші-Альберт (Barabási, Albert), для побудови яких використовується спеціальна процедура, яка полягає в тому, що на початку до малої кількості вузлів поступово додаються нові вузли, зв'язки від яких з більшою вірогідністю приєднуються до тих вузлів, у яких ступінь більша. Тобто в процесі росту мережі нові вузли з більшою ймовірністю утворюють зв'язки з тими вузлами, які вже характеризуються великою кількістю зв'язків у силу їхнього важливого положення в мережі. Було доведено, що саме феномен «багатий багатіє» веде до виникнення степеневих законів у мережах [8].

Очевидно, при приєднанні нового вузла до мережі використовується тільки 1 зв'язок, тобто кількість ребер у мережі можна порівняти з кількістю вузлів, а мережа є квазіієрархічною (ієрархічність може порушуватися лише в початковому складі вузлів). Модель кращого приєднання Барабаші-Альберт реалізована, зокрема, мовою R [9] в пакеті `igraph` за допомогою функції `barabasi.game()`.

#### 3.2. Мережа Ердеша-Рен`ї

Мережу Ердеша-Рен`ї (P. Erdős, A. Rnyi) [10] можна побудувати, розподіливши випадковим чином  $M$  зв'язків між  $N$  вузлами. Її іноді називають моделлю пуассонівського випадкового графа (Poisson random graph model) через пуассонівський розподіл ступенів при  $N \rightarrow \infty$ , або іноді просто моделлю випадкового графа (random graph model). Еквівалентна модель, в якій значення кількості ребер  $M$  замінюється відповідною ймовірністю  $p$  появи нового ребра в графі. Модель випадкового графа реалізована мовою R в пакеті `igraph`.

### 3.3. Мережа «малого світу» (Small World)

Д. Уаттс і С. Строгатц (D.J.Watts, S. Strogatz) виявили феномен, характерний для багатьох реальних мереж, названий ефектом малих світів (Small Worlds) [11]. Ними була запропонована процедура побудови наочної моделі мережі, якій притаманний цей феномен. Ця модель являє собою одномірну регулярну решітку, що складається з  $N$  вузлів, де кожен вузол з'єднаний тільки зі своїми 4 найближчими сусідами, і накладені періодичні граничні умови — решітка згорнута в кільце. Потім виконується така процедура: з імовірністю  $p$  відбувається перемикання (rewiring) невеликої кількості зв'язків (ребер), у ході якого вони видаляються і замінюються іншими зв'язками, що з'єднують два випадково обраних вузла. У початковому стані ця мережа регулярна, її кожен вузол з'єднаний з чотирма сусідніми. Потім у цій мережі деякі «ближні» зв'язку випадковим чином замінені «далекими» — саме в цьому стані виникає феномен «малих світів» (при  $p \in (0.01, 0.1)$ ). При подальшому збільшенні  $p$  утворюється мережа, яка за властивостями близька до випадкової мережі Ердеша-Рен'ї.

## 4. Модель

Було проведено імітаційне моделювання процесу руйнування трьох мереж, а саме, Барабаші-Альберт, Ердеша-Рен'ї, Ватса-Строгатца. Моделювання проводилося мовою програмування R з використанням бібліотеки igraph.

Модель представляла собою дискретний процес, на кожному кроці з обраної мережі видалялося одне ребро. При цьому кожен раз перераховувалася кількість вузлів у найбільшій зв'язній компоненті. Тобто на кроці  $i$  це значення становитиме  $V_i$ , що еквівалентно стану системи при одночасному видаленні ребер з імовірністю  $p = i / M$ .

Тексти програм мовою R наведені в Додатку 1 (відображення мережі) і Додатку 2 (дослідження залежності «потужності» системи залежно від кроку ітерації).

Якщо задати поріг руйнування, наприклад, наступним чином, мережа функціональна, якщо розмір найбільшої зв'язної компоненти  $V_s$  складає 0,2 від первинного розміру мережі  $V_0$ , тобто:  $|V_s|/|V_0| \geq \tau$ ,  $\tau = 0,2$  то, відповідно, отримуємо значення порогової імовірності  $p^*$  для мереж:

Ердеша-Рен'ї:  $\approx 0,8$ ;

Ватса-Строгатца:  $\approx 0,7$ ;

Барабаші-Альберт:  $\approx 0,5$ .

Результати моделювання наведені в таблиці та рис. 1–3.

$N$	Назва моделі	Параметри	Ітераційна формула	Точність $R^2$
1	Ердеша-Рен'ї	$N = 200,$ $M = 500$	$-3E-08x^3 + 1E-05x^2 - 0,0011x + 1,0091$	<b>0,9893</b>
2	Уатсса-Строгатца	$N = 200$	$1E-07x^3 - 6E-05x^2 + 0,0061x + 0,8768$	<b>0,9795</b>
3	Барабаші-Альберт	$N = 200$	$-4E-07x^3 + 0,0001x^2 - 0,0187x + 1,0029$	<b>0,9716</b>

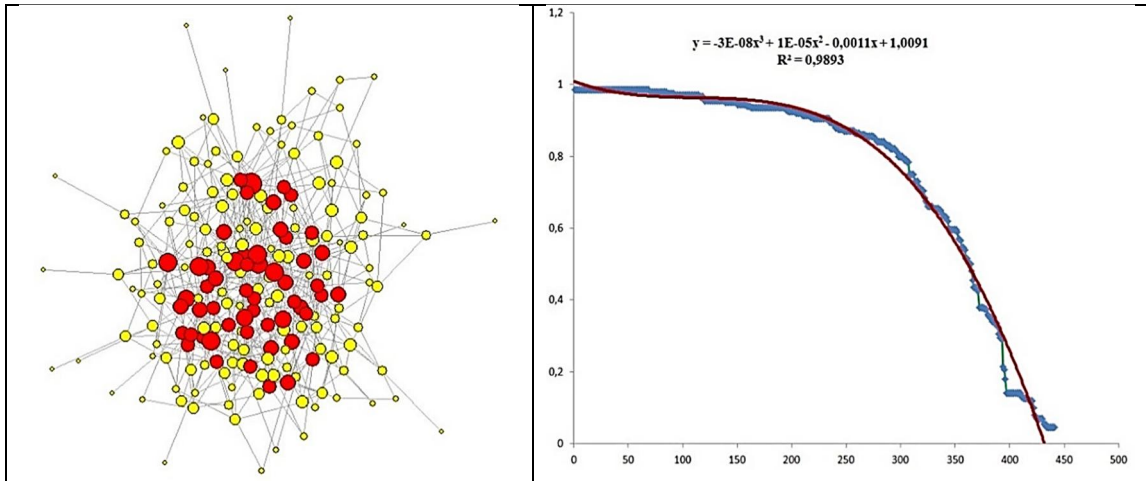


Рис. 1. Мережа Едша-Рен'ї і графік «потужності» мережі (вертикальна вісь) від кроку ітерації (горизонтальна вісь)

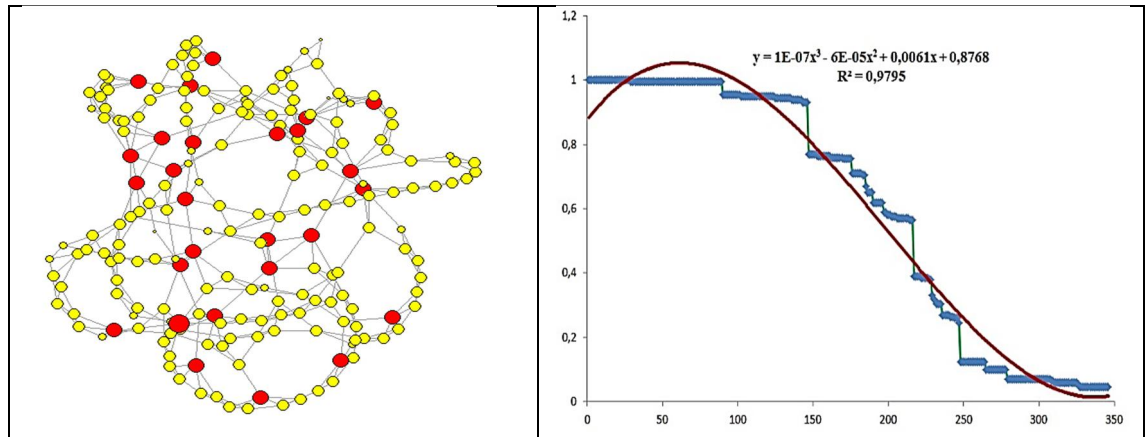


Рис. 2. Мережа Увтса-Строгатца та графік «потужності» мережі (вертикальна вісь) від кроку ітерації (горизонтальна вісь)

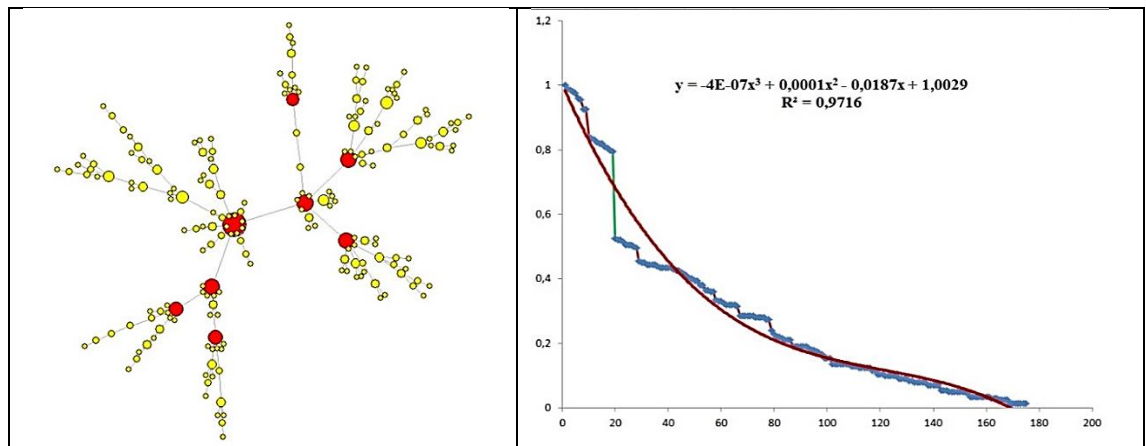


Рис. 3. Мережа Барабаші-Альберт і графік «потужності» мережі (вертикальна вісь) від кроку ітерації (горизонтальна вісь)

Як видно, в кожному разі, криві з високою точністю апроксимуються кубічними многочленами, тобто для точного наближення достатньо трьох ступенів многочлена Татта-Уїтні.

## Висновки

Уведений мережевий показник живучості складніше показника канонічної структурної живучості, в якому враховується тільки порушення зв'язності мережі. Очевидно, що введений показник залежить від топології мережі та її розмірів, разом з тим, добре наближається кубічними поліномами.

У цій роботі був введений новий показник структурної живучості мережевої структури, який ґрунтується на питомому розмірі максимальної компоненти зв'язності мережі при деструктивному впливі на неї.

Розвиток запропонованої моделі можливий шляхом урахування нерівнозначності вузлів мережевої моделі або зміни функції «потужності» мережевої структури. Також дана модель може розширюватися в напрямку вивчення мереж, в яких зв'язки не видаляються остаточно, «регенеруються», або можуть встановлюватися нові зв'язки.

Як видно, в кожному разі, криві з високою точністю апроксимуються кубічними многочленами, тобто для досить точного наближення досить трьох ступенів многочлена Татта-Уїтні. З огляду на топологію мереж і наведені раніше аналітичні оцінки, можна зробити висновок, що найбільша структурна живучість серед трьох розглянутих мереж властива випадковій мережі Ердеша-Рені (у цьому випадку ця мережа має найбільшу кількість ребер). На другому місці — мережа малого світу, ця мережа, в якій вузли мають середню ступінь 2 з розподілом, близьким до пуассонівського. І найгірші показники живучості в мережі Барабаші-Альберт. Слід звернути увагу на те, що в останньому випадку, на відміну від інших, спостерігається «опукла вниз» функція живучості, це свідчить про те, що розглянута в цій роботі «потужність» різко знижується вже навіть за невеликих значень ймовірності деструктивних впливів.

1. Величко В.В., Попков Г.В., Попков В.К. Модели и методы повышения живучести современных систем связи. Москва: Горячая линия – Телеком, 2014.
2. Громов Ю.Ю., Драчев В.О., Набатов К.А., Иванова О.Г. Синтез и анализ живучести сетевых систем: монография. Москва: «Издательство Машиностроение-1», 2007.
3. Oxley J.G. Matroid Theory. Oxford Science Publications, 1992.
4. Sekine K., Imai H., Tani S.: Computing the Tutte Polynomial of a Graph of Moderate Size. In: 6th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC'95). *Lecture Notes in Computer Science*. 1004. P. 224–233 (1995).
5. Tutte W.T. A Contribution to the Theory of Chromatic Polynomials. *Canadian Journal of Mathematics*. 1954. 6. P. 80–91.
6. Филипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей. Москва: Мир, 1984.
7. Долгов А.А. Исследование живучести сетевых информационных систем с использованием неросетевых моделей. Психолого-педагогический журнал Гаудеамус, 2(16), 285-287 (2010).
8. Albert-László Barabási, Réka Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*. 286, 5439. 509–512 (1999).
9. Люк Д.А. Анализ сетей (графов) в среде R. Руководство пользователя. Москва: ДМК Пресс, 2017.
10. Erdős P., Rényi A. On Random Graphs. I. *Publicationes Mathematicae*. 1959. 6. P. 290–297.

11. Watts D.J., Strogatz S.H. Collective dynamics of «small-world» networks. *Nature*. 1998. 393. P. 440–442.

**Додаток 1.**

Вихідний код програми мовою програмування R відображення мережі Барабаші-Альберт:

```
library("igraph")
g <- barabasi.game(200, directed = FALSE)
V(g)$color <- "yellow"
V(g)[degree(g) > 6] $color <- "red"
rescale <- function(nchar,low,high) {
  min_d <- min(nchar)
  max_d <- max(nchar)
  rscl <- ((high-low)*(nchar-min_d))/(max_d-min_d)+low
  rscl
}
node_size <- rescale(degree(g), 3, 12)
plot(g, vertex.label = NA, vertex.size = node_size)
```

**Додаток 2.**

Вихідний код програми мовою програмування R дослідження залежності «потужності» системи залежно від кроку ітерації (мережа Барабаші-Альберт):

```
library("igraph")
N=200
g <- barabasi.game(N, directed = FALSE)

d=1
t=components(g)[2]
r[d]=max(t[[1]])/N
print("D: ")
print(d)
print(r[d])

X=N*N
for (i in 1:X) {
  u=round((N-1)*runif(1))+1
  v=round((N-1)*runif(1))+1
  if (g[u,v]>0) {
    g[u,v]=0
    d=d+1
    t=components(g)[2]
    r[d]=max(t[[1]])/N
    print("D: ")
    print(d)
    print(r[d])
  }
}

plot(r,type="l")
```

Надійшла до редакції 05.03.2021