УДК 004.94

Я. А. Калиновский[1], Ю. Е. Бояринова[1,2], А. С. Сукало[1]
[1]Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина
[2]Национальный технический университет Украины «КПИ им. Игоря Сикорского»
Проспект Победы, 37, 03113 Киев, Украина

Исследование алгебраических и функциональных свойств обобщенных гиперкомплексных числовых систем четвертой размерности

Исследованы алгебраические и функциональные свойства обобщенных коммутативных и некоммутативных гиперкомплексных числовых систем четвертой размерности, полученных с помощью процедуры удвоения Грассмана-Клиффорда. Получены выражения для норм, сопряжений и представлений экспоненциальных функций.

***Ключевые слова**: гиперкомплексная числовая система (ГЧС), процедура удвоения Грассмана-Клиффорда, базис ГЧС, характеристическое уравнение, экспоненциальная функция, ассоциированная система дифференциальных уравнений, коммутативность, норма, сопряжение.*

Введение

С помощью коммутативных и некоммутативных процедур удвоения Грассмана-Клиффорда [1] в работах [2, 3] были синтезированы в общем виде ГЧС четвертой размерности $Q_1(E)$ и $Q_2(E)$, полученные автоудвоением [2] ГЧС второй размерности $Q(e)$, у которой e_1 — единичный элемент, а $e_2^2 = pe_1 + qe_2$.

$$\begin{array}{c|cccc} Q_{1,2}(E) & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ \hline E_1 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ E_2 & E_2 & pE_1 + qE_2 & E_4 & pE_3 + qE_4 \\ E_3 & E_3 & \pm E_4 & pE_1 + qE_3 & \pm pE_2 \pm qE_4 \\ E_4 & E_4 & \pm pE_3 \pm qE_4 & pE_2 + qE_4 & \pm p^2E_1 \pm pqE_2 \pm pqE_3 \pm q^2E_4 \end{array} . \quad (1)$$

В таблице Кели (1) коммутативной системе $Q_1(E)$ соответствуют все плюсы, а некоммутативной системе $Q_2(E)$ — в знаке «$\pm$» — минусы. Этому правилу будем придерживаться и в дальнейшем.

При небольших отличиях таблиц умножения систем $Q_1(E)$ и $Q_2(E)$ их структура и свойства сильно отличаются. Так, например, формулы умножения двух гиперкомплексных чисел выглядят так:

$$\begin{aligned} M\cdot X = {} & (m_1x_1 \mp pm_2x_2 + pm_3x_3 \pm p^2m_4x_4)e_1 + \\ & +(m_1x_2 + m_2(x_1+qx_2) + pm_3x_4 \pm m_4(px_3+pqx_4))e_2 + \\ & +(m_1x_3 \pm pm_2x_4 + m_3(x_1+qx_3) + m_4(px_2 \pm pqx_4))e_3 + \\ & +(m_1x_4 \pm m_2(x_3+qx_4) + m_3(x_2+qx_4) + m_4(x_1+qx_2 \pm qx_3 \pm q^2x_4))e_4. \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что ГЧС Q_1 является ассоциативной, а ГЧС Q_2 — неассоциативной при $q \neq 0$.

Действительно, рассмотрим в системе Q_2 тождество $(E_2E_3)E_4 = E_2(E_3E_4)$:

$$\begin{aligned} (E_2E_3)E_4 = E_4E_4 = -p^2E_1 - pqE_2 - pqE_3 - q^2E_4, \\ E_2(E_3E_4) = E_2(-pE_2 - qE_4) = -p(pE_1+qE_2) - qE_2E_4 = \\ = -p^2E_1 - pqE_2 - q(pE_3+qE_4) = -p^2E_1 - pqE_2 - pqE_3 - q^2E_4, \end{aligned}$$

т.е. тождество $(E_2E_3)E_4 = E_2(E_3E_4)$ выполняется.

Однако другие тождества, например $(E_3E_2)E_4 = E_3(E_2E_4)$, не выполняются:

$$\begin{aligned} (E_3E_2)E_4 = -E_4E_4 = p^2E_1 + pqE_2 + pqE_3 + q^2E_4, \\ E_3(E_2E_4) = E_3(pE_3+qE_4) = p(pE_1+qE_3) + q(-pE_2 - qE_4) = \\ = p^2E_1 + pqE_2 - pqE_3 - q^2E_4. \end{aligned}$$

Значит $(E_2E_3)E_4 \neq E_2(E_3E_4)$.

Свойство неассоциативности не оказывает влияния на расчеты, если в моделях нет уравнений степени выше второй. В противном случае надо следить за порядком вычислений.

Целью данной работы является дальнейшее исследование таких алгебраических свойств ГЧС $Q_1(E)$ и $Q_2(E)$ как нормируемость и сопряженность, а также построение экспонент в них, что необходимо для использования этих систем в математическом моделировании.

Нормы и сопряжения

Нормы $N(a)$ гиперкомплексного числа $a = \sum_{i=1}^{4} a_iE_i$ в системах Q_1 и Q_2 строятся по формуле [4]:

$$N(a)=\left\|(N(a))_{j,k}=\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij}^{k}a_i\right\|_{j,k=1\ldots n}. \qquad (2)$$

В ГЧС Q_1 с учетом (1) выражение (2) примет вид:

$$N(a)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ pa_2 & a_1+qa_2 & pa_4 & a_3+qa_4 \\ pa_3 & pa_4 & a_1+qa_3 & a_2+qa_4 \\ p^2a_4 & pa_3+pqa_4 & pa_2+pqa_4 & a_1+qa_2+qa_3+q^2a_4 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Если вычислить этот определитель, то получится довольно громоздкое выражение:

$$\begin{aligned}
&2\,a_1^3\,q\,a_2+2\,a_1^3\,q\,a_3+a_1^3\,q^2\,a_4+a_1^2\,q^2\,a_3^2-2\,a_1^2\,p\,a_2^2+q^2\,a_2^2\,a_1^2\\
&\quad-2\,p^2\,a_4^2\,a_1^2-2\,p\,a_3^2\,a_1^2-2\,p^3\,a_2^2\,a_4^2-2\,p^2\,a_2^2\,a_3^2-2\,p^3\,a_3^2\,a_4^2\\
&\quad-2\,p\,a_3\,q\,a_4\,a_1^2+a_1\,q^4\,a_2\,a_3\,a_4-3\,a_1\,q^2\,a_2^2\,p\,a_4-a_1\,q^3\,a_2\\
&a_4^2\,p+8\,a_1\,p^2\,a_4\,a_3\,a_2+2\,a_1\,p^2\,a_3\,a_4^2\,q-3\,a_1\,p\,a_3^2\,q^2\,a_4\\
&\quad+2\,a_1\,p^2\,q\,a_4^2\,a_2-a_1\,p\,q^3\,a_4^2\,a_3-2\,a_1^2\,a_2\,p\,q\,a_4-2\,p\\
&a_2^2\,a_1\,q\,a_3-p\,a_2^2\,q^3\,a_3\,a_4+2\,p^2\,a_2\,a_4\,q\,a_3^2+3\,p^2\,a_2\,a_4^2\,q^2\,a_3\\
&\quad-2\,p\,a_3^2\,a_2\,a_1\,q-p\,a_3^2\,a_2\,q^3\,a_4+2\,p^2\,a_3\,a_2^2\,q\,a_4+a_1^4\\
&\quad+a_1\,q^3\,a_2^2\,a_3+a_1\,q^3\,a_2\,a_3^2-2\,a_1\,q\,a_2^3\,p-2\,a_1\,p\,a_3^3\,q\\
&\quad+a_1\,p^2\,q^2\,a_4^3+3\,a_1^2\,q^2\,a_3\,a_2+a_1^2\,q^3\,a_3\,a_4-2\,a_1^2\,q^2\,a_4^2\,p\\
&\quad+q^3\,a_2\,a_1^2\,a_4-p\,a_2^3\,q^2\,a_3-2\,p\,a_2^2\,q^2\,a_3^2+2\,p^2\,a_2^3\,q\,a_4+p^2\\
&a_2^2\,q^2\,a_4^2-2\,p^3\,a_2\,a_4^3\,q-p\,a_3^3\,a_2\,q^2+2\,p^2\,a_3^3\,a_4\,q+p^2\,a_3^2\\
&a_4^2\,q^2-2\,p^3\,a_3\,a_4^3\,q+p^2\,a_2^4+p^2\,a_3^4+p^4\,a_4^4
\end{aligned} \qquad (4)$$

которое сильно упрощается при использовании средств системы символьных вычислений Maple:

$$N(A)=\left[\left(a_1^2-pa_2^2-pa_3^2+p^2a_4^2\right)+q\left(a_1-pa_4\right)\left(a_2+a_3\right)+q^2a_1a_4\right]^2-\left(2pa_1a_4-2pa_2a_3\right)^2.$$

Следует отметить, что это и все последующие построения стали возможными только при использовании разработанной авторами системы символьных вычислений в среде Maple.

В некоммутативной ГЧС Q_2 выражение для нормы (2) с учетом (1) принимает вид:

$$N(a)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ pa_2 & a_1+qa_2 & pa_4 & a_3+qa_4 \\ pa_3 & -pa_4 & a_1+qa_3 & -a_2-qa_4 \\ -p^2a_4 & pa_3-pqa_4 & -pa_2-pqa_4 & a_1-qa_2+qa_3-q^2a_4 \end{vmatrix},$$

или

$$\begin{aligned} &2\,a_1^3\,q\,a_3 - a_1^3\,q^2\,a_4 + a_1^2\,q^2\,a_3^2 - 2\,a_1^2\,p\,a_2^2 - q^2\,a_2^2\,a_1^2 + 2\,p^2\,a_4^2\,a_1^2 \\ &\quad - 2\,p\,a_3^2\,a_1^2 - 2\,p^3\,a_2^2\,a_4^2 + 2\,p^2\,a_2^2\,a_3^2 - 2\,p^3\,a_3^2\,a_4^2 \\ &\quad - a_1\,q^4\,a_2\,a_3\,a_4 - a_1\,q^2\,a_2^2\,p\,a_4 - a_1\,q^3\,a_2\,a_4^2\,p + 2\,a_1\,p^2\,a_3 \\ &\quad a_4^2\,q + a_1\,p\,a_3^2\,q^2\,a_4 + a_1\,p\,q^3\,a_4^2\,a_3 - 2\,a_1^2\,a_2\,p\,q\,a_4 - 2\,p \\ &\quad a_2^2\,a_1\,q\,a_3 + p\,a_2^2\,q^3\,a_3\,a_4 + 2\,p^2\,a_2\,a_4\,q\,a_3^2 - p^2\,a_2\,a_4^2\,q^2\,a_3 \\ &\quad + p\,a_3^2\,a_2\,q^3\,a_4 + a_1^4 - a_1\,q^3\,a_2^2\,a_3 + a_1\,q^3\,a_2\,a_3^2 - 2\,a_1\,p\,a_3^3\,q \\ &\quad + a_1\,p^2\,q^2\,a_4^3 + a_1^2\,q^2\,a_3\,a_2 - a_1^2\,q^3\,a_3\,a_4 - q^3\,a_2\,a_1^2\,a_4 + p \\ &\quad a_2^3\,q^2\,a_3 + 2\,p^2\,a_2^3\,q\,a_4 + p^2\,a_2^2\,q^2\,a_4^2 - 2\,p^3\,a_2\,a_4^3\,q - p \\ &\quad a_3^3\,a_2\,q^2 - p^2\,a_3^2\,a_4^2\,q^2 + p^2\,a_2^4 + p^2\,a_3^4 + p^4\,a_4^4 \end{aligned}$$

Упростить это выражение, как для системы $Q_3(E)$, не представляется возможным, однако при подстановке значений конкретного аргумента это выражение сильно упрощается. Так, например, при $A=e_1+e_2+e_3+e_4$:

$$N(A)=1-4p+2q+6p^2-6pq-4p^3-2q^3+6p^2q+p^4-q^4-2p^3q+2pq^3.$$

Сопряженные числа $\overline{A}$ в этих ГЧС находятся из решений системы [4]:

$$A\cdot\overline{A}=N(A)\,\varepsilon\ .$$

Ниже приведены компоненты числа $\overline{A}=\overline{a}_1e_1+\overline{a}_2e_2+\overline{a}_3e_3+\overline{a}_4e_4$, сопряженного к числу A в ГЧС Q_1:

$$\begin{aligned} &3\,a_1\,q^2\,a_3\,a_2 + a_1\,q^3\,a_3\,a_4 - 2\,a_1\,q^2\,a_4^2\,p + q^3\,a_2\,a_1\,a_4 \\ &\quad + q^4\,a_2\,a_3\,a_4 - 2\,q^2\,a_2^2\,p\,a_4 - q^3\,a_2\,a_4^2\,p + 2\,p^2\,a_4\,a_3\,a_2 \\ &\quad + p^2\,a_3\,a_4^2\,q - 2\,p\,a_3^2\,q^2\,a_4 + p^2\,q\,a_4^2\,a_2 - p\,q^3\,a_4^2\,a_3 + 2 \\ &\quad a_1^2\,q\,a_2 + 2\,a_1^2\,q\,a_3 + a_1^2\,q^2\,a_4 + a_1\,q^2\,a_3^2 - a_1\,p\,a_2^2 + q^2\,a_2^2\,a_1 \\ &\quad + q^3\,a_2^2\,a_3 + q^3\,a_2\,a_3^2 - q\,a_2^3\,p - p^2\,a_4^2\,a_1 - p\,a_3^2\,a_1 - p\,a_3^3\,q \\ &\quad + p^2\,q^2\,a_4^3 + a_1^3 - 2\,p\,a_3\,q\,a_4\,a_1 - 2\,a_1\,a_2\,p\,q\,a_4 \end{aligned}$$

$$-p^2 a_4^3 q - p^2 a_4^2 a_2 + a_2 q^2 a_4^2 p + p q a_4^2 a_1 + p a_4^2 q^2 a_3 + 2$$
$$a_2^2 p q a_4 + p a_4 q a_3^2 + 2 p a_4 a_3 a_1 + p a_2^3 - p a_3^2 a_2$$
$$- a_2 q^3 a_3 a_4 - a_2 a_1 q^2 a_4 - q^2 a_3 a_2^2 - a_1 q a_2^2 - a_2 a_1^2$$
$$- a_2 q^2 a_3^2 - 2 a_2 a_1 q a_3$$

$$2 a_2 p a_4 a_1 - a_3 p a_2^2 - a_3 a_1^2 - 2 a_2 a_1 q a_3 - a_1 q a_3^2$$
$$- a_1 q^2 a_4 a_3 + p q a_4^2 a_1 - q^2 a_3 a_2^2 - a_2 q^2 a_3^2 - a_2 q^3 a_3 a_4$$
$$+ a_2^2 p q a_4 + a_2 q^2 a_4^2 p + p a_3^3 + 2 p a_4 q a_3^2 - p^2 a_3 a_4^2 + p$$
$$a_4^2 q^2 a_3 - p^2 a_4^3 q$$

$$-a_2 p a_4^2 q - p a_4^2 a_3 q + 2 a_2 a_3 a_1 + q a_2^2 a_3 + a_2 q a_3^2$$
$$+ a_2 q^2 a_4 a_3 - a_4 a_1^2 + p^2 a_4^3 - p a_4 a_3^2 - p a_4 a_2^2$$

При подстановке значений конкретного аргумента эти выражения сильно упрощаются. Так, например, при $A = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ эти компоненты будут такими:

$$\overline{a}_1 = 1 + 4q + p^2 + 4q^3 + q^4 + 6q^2 - 6pq - 6q^2 p + p^2 q^2 - 2pq^3 + 2p^2 q - 2p,$$
$$\overline{a}_2 = -1 - p^2 q - p^2 + 2q^2 p + 4pq + 2p - q^3 - 3q^2 - 3q,$$
$$\overline{a}_3 = -1 + 2p - q + q^2 + q^3 - 2pq^2 - p^2 + p^2 q,$$
$$\overline{a}_4 = 1 + 2pq + 2q + q^2 + p^2 - 2p.$$

В гиперкомплексной системе Q_2 компоненты сопряженных чисел $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4$ выглядят так:

$$a_1 q^2 a_3 a_2 - a_1 q^3 a_3 a_4 - q^3 a_2 a_1 a_4 - q^4 a_2 a_3 a_4 - 2 q^2 a_2^2 p a_4 ,$$
$$- q^3 a_2 a_4^2 p + p^2 a_3 a_4^2 q + p^2 q a_4^2 a_2 + p q^3 a_4^2 a_3 + 2$$
$$a_1^2 q a_3 - a_1^2 q^2 a_4 + a_1 q^2 a_3^2 - a_1 p a_2^2 - q^2 a_2^2 a_1 - q^3 a_2^2 a_3$$
$$+ q^3 a_2 a_3^2 - q a_2^3 p + p^2 a_4^2 a_1 - p a_3^2 a_1 - p a_3^3 q + p^2 q^2 a_4^3$$
$$+ a_1^3 - 2 a_1 a_2 p q a_4$$

$$-p^2 a_4^3 q - p^2 a_4^2 a_2 + a_2 q^2 a_4^2 p - p q a_4^2 a_1 - p a_4^2 q^2 a_3 + 2$$
$$a_2^2 p q a_4 + p a_4 q a_3^2 + p a_2^3 + p a_3^2 a_2 + a_2 q^3 a_3 a_4$$
$$+ a_2 a_1 q^2 a_4 + a_1 q a_2^2 + q^2 a_3 a_2^2 - 2 a_2 a_1 q a_3 - a_2 q^2 a_3^2$$
$$- a_2 a_1^2$$

$$2\,p\,a_4\,a_3\,q\,a_2 + a_3\,p\,a_2^2 - a_3\,a_1^2 - a_1\,q\,a_3^2 + a_1\,q^2\,a_4\,a_3 - p\,q\,a_4^2\,a_1 + q^2\,a_3\,a_2^2 - a_2\,q^2\,a_3^2 + a_2\,q^3\,a_3\,a_4 - a_2^2\,p\,q\,a_4 - a_2\,q^2\,a_4^2\,p + p\,a_3^3 - p^2\,a_3\,a_4^2 - p\,a_4^2\,q^2\,a_3 + p^2\,a_4^3\,q$$

$$a_2\,q\,a_3^2 - q\,a_2^2\,a_3 + p\,a_4^2\,a_3\,q + p\,a_4\,a_2^2 - 2\,a_1\,a_3\,q\,a_4 - a_2\,q^2\,a_4\,a_3 + p\,a_4\,a_3^2 - p^2\,a_4^3 + a_2\,p\,a_4^2\,q - a_4\,a_1^2$$

и при подстановке значений конкретного аргумента эти компоненты примут значения:

$$\begin{aligned}
\overline{a}_1 &= 1 + 2q + p^2 - 2q^3 - q^4 - 4pq - 2q^2p + p^2q^2 + 2p^2q - 2p\,,\\
\overline{a}_2 &= -1 - p^2q - p^2 + 2pq + 2p + q^3 + q^2 - q\,,\\
\overline{a}_3 &= -1 + 2p - q + q^2 + q^3 - 2pq^2 - p^2 + p^2q\,,\\
\overline{a}_4 &= -1 + 2pq - 2q - q^2 - p^2 + 2p\,.
\end{aligned}$$

Представления экспоненциальной функции

Рассмотрим построения представлений экспоненциальных функций в гиперкомплексных числовых системах Q_1 и Q_2, следуя [4].

Ассоциированная система дифференциальных уравнений в Q_1 имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= m_1x_1 + pm_2x_2 + pm_3x_3 + p^2m_4x_4,\\
\frac{dx_2}{dt} &= m_2x_1 + (m_1 + qm_2)x_2 + pm_4x_3 + (pm_3 + pqm_4)x_4,\\
\frac{dx_3}{dt} &= m_3x_1 + pm_4x_2 + (m_1 + qm_3)x_3 + (pm_2 + pqm_4)x_4,\\
\frac{dx_4}{dt} &= m_4x_1 + (m_3 + qm_4)x_2 + (m_2 + qm_4)x_3 + (m_1 + qm_2 + qm_3 + q^2m_4)x_4.
\end{aligned} \tag{5}$$

По уравнению (5) строится характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}
m_1 - \lambda & pm_2 & pm_3 & p^2m_4\\
m_2 & m_1 + qm_2 - \lambda & pm_4 & pm_3 + pqm_4\\
m_3 & pm_4 & m_1 + qm_3 - \lambda & pm_2 + pqm_4\\
m_4 & m_3 + qm_4 & m_2 + qm_4 & m_1 + qm_2 + qm_3 + q^2m_4 - \lambda
\end{vmatrix} = 0\,,$$

которое в явном виде записывать не будем, так как левая часть — это громоздкий полином, имеющий около ста членов. Решение его в символьном виде с помощью системы аналитических вычислений Maple после преобразований дает следующие корни:

$$\lambda_1 = m_1 + m_2(\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q^2+4p}) + m_3(\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\sqrt{q^2+4p}) - pm_4,$$

$$\lambda_2 = m_1 + m_2(\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\sqrt{q^2+4p}) + m_3(\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q^2+4p}) - pm_4, \qquad (6)$$

$$\lambda_3 = m_1 + m_2(\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q^2+4p}) + m_3(\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q^2+4p}) + m_4(p + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}\sqrt{q^2+4p}),$$

$$\lambda_4 = m_1 + m_2(\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\sqrt{q^2+4p}) + m_3(\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\sqrt{q^2+4p}) + m_4(p + \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}\sqrt{q^2+4p}).$$

Как видим, при $\Delta = q^2 + 4p \neq 0$ система дифференциальных уравнений (6) имеет 4 различных корня. При $\Delta > 0$ они все будут вещественные, а при $\Delta < 0$ — комплексные. При этом они попарно сопряженные по знакам перед радикалами. В этом случае теория дифференциальных уравнений предписывает искать решения в виде

$$x(t) = C_1 ch\omega t + C_2 sh\omega t\ , C_1, C_2 \in R,$$

если корни вещественные, либо

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t\ , C_1, C_2 \in R,$$

если корни комплексные.

Однако мы поступим несколько иначе: будем искать решения для сопряженных корней в виде

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{\bar{\lambda} t},$$

где $C_1, C_2 \in Q_1$, то есть являются гиперкомплексными константами из рассматриваемой ГЧС. Это объясняется несколькими причинами. Во-первых, несколько упрощаются и без того весьма громоздкие символьные вычисления и преобразования, во-вторых, экспонента в такой форме позволяет делать выводы об изоморфизме различных ГЧС [7–9]. И, наконец, с помощью формулы Эйлера при необходимости можно перейти к традиционной форме экспоненты.

В том же случае, когда $\Delta = q^2 + 4p = 0$, все четыре корня совпадут:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = m_1 + \frac{1}{2}qm_2 + \frac{1}{2}qm_3 + \frac{1}{4}q^2 m_4,$$

и решение ищется в традиционной форме.

Итак, рассмотрим первый случай $\Delta = q^2 + 4p \neq 0$. Частные решения имеют вид:

$$x_{ij}(t) = C_{i,j} e^{\lambda_i t},\ C_{i,j} \in R,\ i, j = 1, \dots, 4. \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (5), после преобразований получим линейную систему из 16-ти уравнений относительно 16-ти неизвестных $C_{i,j}$, решение которой дает следующие значения произвольных постоянных:

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	$-C_{1,3}(q+\sqrt{q^2+4p})/2$	$-C_{1,3}(q+q\sqrt{q^2+4p}+2p)/2p$	$C_{1,3}$	$C_{1,3}(q+\sqrt{q^2+4p})/2p$
2	$-C_{2,3}(q-\sqrt{q^2+4p})/2$	$-C_{2,3}(q-q\sqrt{q^2+4p}+2p)/2p$	$C_{2,3}$	$C_{2,3}(q-\sqrt{q^2+4p})/2p$
3	$-C_{3,3}(q-\sqrt{q^2+4p})/2$	$C_{3,3}$	$C_{3,3}$	$C_{3,3}(q+\sqrt{q^2+4p})/2p$
4	$-C_{4,3}(q+\sqrt{q^2+4p})/2$	$C_{4,3}$	$C_{4,3}$	$C_{4,3}(q-\sqrt{q^2+4p})/2p$

Как видим, произвольные константы $C_{1,3}, C_{2,3}, C_{3,3}, C_{4,3}$ являются свободными. Для их определения подставим полученные значения констант в (7), составим выражения для компонентов общего решения

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^{4} x_{ij}(t) \tag{8}$$

и потребуем, чтобы экспонента при $t = 0$ принимала единичное значение, то есть:

$$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 0,\ x_4(0) = 0. \tag{9}$$

Система уравнений (9) — это система линейных уравнений относительно переменных $C_{1,3}, C_{2,3}, C_{3,3}, C_{4,3}$:

$$\begin{cases} C_{1,3}(q+\sqrt{\Delta})+C_{2,3}(q-\sqrt{\Delta})+C_{3,3}(q-\sqrt{\Delta})+C_{4,3}(q+\sqrt{\Delta}) = -1, \\ C_{1,3}(q^2+2p+\sqrt{\Delta})+C_{2,3}(q^2+2p-\sqrt{\Delta})-2C_{3,3}-2C_{4,3} \quad 0, \\ C_{1,3}+C_{2,3}+C_{3,3}+C_{4,3} = 0, \\ C_{1,3}(q+\sqrt{\Delta})+C_{2,3}(q-\sqrt{\Delta})+C_{3,3}(q-\sqrt{\Delta})+C_{4,3}(q+\sqrt{\Delta}) = 0. \end{cases}$$

Решая ее, получаем:

$$C_{1,3} = \frac{q-\Delta}{2\Delta^2},\ C_{2,3} = \frac{q+\Delta}{2\Delta^2},\ C_{3,3} = -\frac{q-\Delta}{2\Delta^2},\ C_{4,3} = -\frac{q+\Delta}{2\Delta^2}. \tag{10}$$

Из (10) видно, что если бы не учитывалось ограничение $\Delta = q^2 + 4p \neq 0$, то в знаменателях были бы нули.

Подставляя (9) в (7), группируя и полагая $t = 1$, получаем представление экспоненты в коммутативной ГЧС Q_1:

$$\begin{aligned}
&Exp(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4)=\\
&=\frac{1}{4\Delta}(4pe_1-\frac{1}{p}(q-\sqrt{\Delta})(q^2+q\sqrt{\Delta}+2p)e_2+2(q-\sqrt{\Delta})e_3-4e_4)e^{\lambda_1}+\\
&+(4pe_1-\frac{1}{p}(q+\sqrt{\Delta})(q^2-q\sqrt{\Delta}+2p)e_2+2(q+\sqrt{\Delta})e_3-4e_4)e^{\lambda_2}+\\
&+((q-\sqrt{\Delta})^2e_1-2(q+\sqrt{\Delta})e_2-2(q-\sqrt{\Delta})e_3+4e_4)e^{\lambda_3}+\\
&+((q+\sqrt{\Delta})^2e_1-2(q-\sqrt{\Delta})e_2-2(q+\sqrt{\Delta})e_3+4e_4)e^{\lambda_4},
\end{aligned} \tag{11}$$

где корни $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$, определяемые из (5), являются функциями компонентов гиперкомплексного числа $M=m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4$, от которого вычисляется экспонента.

Рассмотрим случай $\Delta=q^2+4p=0$. Как было отмечено выше, в этом случае ассоциированная система (5) имеет один четырехкратный характеристический корень

$$\lambda=m_1+\frac{1}{2}qm_2+\frac{1}{2}qm_3+\frac{1}{4}q^2m_4\,.$$

Поэтому решения имеют вид: $x_i(t)=(C_{i,1}+C_{i,2}t+C_{i,3}t^2+C_{i,4}t^3)e^{\lambda t}$, $i=1,\dots,4$.

Действуя аналогично предыдущему случаю, получим следующие значения 16-ти констант:

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	1	$-(qm_2+qm_3+q^2m_4/2)/2$	$(q^2m_2m_3+q^3m_2m_4/2+q^3m_3m_4/2+q^4m_4^2/4)/4$	0
2	0	m_2	$-(qm_2m_3+q^2m_2m_4/2+q^2m_3m_4/2+q^3m_4^2/4)/2$	0
3	0	m_3	$-(qm_2m_3+q^2m_2m_4/2+q^2m_3m_4/2+q^3m_4^2/4)/2$	0
4	0	m_4	$m_2m_3+qm_2m_4/2+qm_3m_4/2+q^2m_4^2/4$	0

И окончательно представление экспоненты в ГЧС Q_1 для случая $\Delta\quad q^2+4p=0$ принимает вид:

$$\begin{aligned}
&Exp(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4)=\\
&=e^{\lambda}((1-\frac{1}{2}(qm_2+qm_3+\frac{1}{2}q^2m_4)+\frac{1}{4}(q^2m_2m_3+\frac{1}{2}q^3m_2m_4+\frac{1}{2}q^3m_3m_4+\frac{1}{4}q^4m_4^2))e_1+\\
&+(m_2-\frac{1}{2}(qm_2m_3+\frac{1}{2}q^2m_2m_4+\frac{1}{2}q^2m_3m_4+\frac{1}{4}q^3m_4^2))e_2+\\
&(m_3-\frac{1}{2}(qm_2m_3+\frac{1}{2}q^2m_2m_4+\frac{1}{2}q^2m_3m_4+\frac{1}{4}q^3m_4^2))e_3+\\
&+(m_4+m_2m_3+\frac{1}{2}qm_2m_4+\frac{1}{2}qm_3m_4+\frac{1}{4}q^2m_4^2)e_4).
\end{aligned} \tag{12}$$

Как видно, здесь нет нулей в знаменателях.

Рассмотрим теперь построение представления экспоненты в некоммутативной ГЧС Q_2.

Ассоциированная система дифференциальных уравнений в Q_2 имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= m_1x_1 + pm_2x_2 + pm_3x_3 - p^2m_4x_4,\\
\frac{dx_2}{dt} &= m_2x_1 + (m_1 + qm_2)x_2 + pm_4x_3 - (pm_3 + pqm_4)x_4,\\
\frac{dx_3}{dt} &= m_3x_1 - pm_4x_2 + (m_1 + qm_3)x_3 + (pm_2 - pqm_4)x_4,\\
\frac{dx_4}{dt} &= m_4x_1 - (m_3 + qm_4)x_2 + (m_2 + qm_4)x_3 + (m_1 + qm_2 - qm_3 - q^2m_4)x_4.
\end{aligned} \tag{13}$$

Система уравнений (13) при выполнении условия $\Delta = q^2 + 4p = 0$ имеет два различных двукратных корня:

$$\lambda_{1,2} = m_1 + \frac{1}{2}qm_2 - \frac{1}{4}q^2m_4 \pm \frac{1}{4}q\sqrt{2(q^2m_4 - 2qm_2m_4 + 2m_3^2 - 4m_2m_3 + 2qm_3m_4)},$$

а при $\Delta = q^2 + 4p \neq 0$ система уравнений (13) имеет четыре разных корня, однако, ввиду громоздкости, приводить их здесь мы не будем.

Представление экспоненциальной функции в ГЧС Q_2 имеет настолько громоздкий и необозримый вид, что пользоваться им становится нецелесообразно. Поэтому целесообразно найти представления решения системы уравнений (13) в виде разложения в ряд. Это представление имеет ограниченную точность, но позволяет производить расчеты гораздо эффективнее, чем с использованием представления экспоненты с помощью степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{n!}$.

Ниже приведены первые четыре члена разложения экспоненты в ряд, полученные с помощью системы символьных вычислений Maple.

$$\begin{aligned}
&Exp(m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4) =\\
&= (1 + m_1 + \frac{1}{2}m_1^2 + \frac{1}{2}pm_2^2 + \frac{1}{2}pm_3^2 + \frac{1}{2}pm_4^2 - \frac{1}{2}p^2m_1m_4^2 + \frac{1}{6}p^2q^2m_4^3 + \frac{1}{6}m_1^3 +\\
&+ \frac{1}{2}pm_1m_2^2 + \frac{1}{2}pm_1m_3^2 + \frac{1}{6}pqm_2^3 - \frac{1}{6}p^2qm_2m_4^2 + \frac{1}{6}pqm_3^3 - \frac{1}{6}p^2qm_3m_4^2)e_1 +\\
&+ (m_2 + m_1m_2 + \frac{1}{2}qm_2^2 - \frac{1}{2}pqm_1m_4^2 + \frac{1}{6}pq^2m_3m_4^2 + \frac{1}{6}pq^3m_4^3 + \frac{1}{2}m_1^2m_2 +\\
&+ \frac{1}{6}pm_3^2 + \frac{1}{6}pm_2m_3^2 - \frac{1}{6}p^2m_2m_4^2 + \frac{1}{2}qm_1m_2^2 + \frac{1}{6}q^2m_2^3 - \frac{1}{6}pq^2m_2m_4^2 +\\
&+ \frac{1}{6}pqm_3^2m_4 - \frac{1}{6}p^2qm_4^3)e_2 +
\end{aligned}$$

$$+(m_3+m_1m_3+\frac{1}{2}qm_3^2-\frac{1}{2}pqm_4^2-\frac{1}{2}pqm_1m_4^2-\frac{1}{6}p\ q^2m_2m_4^2+\frac{1}{6}pq^3m_4^3+$$
$$+\frac{1}{2}m_1^2m_3+\frac{1}{6}pm_2^2m_3+\frac{1}{6}pm_2^2m_3+\frac{1}{6}pm_3^3-\frac{1}{6}p^2m_3m_4^2-\frac{1}{6}pqm_2^2m_4+$$
$$+\frac{1}{6}p^2qm_4^3+\frac{1}{2}qm_1m_3^2+\frac{1}{6}q^2m_3^3-\frac{1}{6}pq^2m_3m_4^2)e_3+$$
$$+(m_4+m_1m_4-\frac{1}{2}q^2m_4^2+\frac{1}{2}m_1^2m_4-\frac{1}{2}q^2m_1m_4^2-\frac{1}{6}q^3m_2m_4^2+\frac{1}{6}q^3m_3m_4^2+$$
$$+\frac{1}{6}pm_2^2m_4+\frac{1}{6}pm_3^2m_4-\frac{1}{6}p^2m_4^3-\frac{1}{6}qm_2^2m_3-\frac{1}{6}q^2m_2^2m_4+\frac{1}{6}pqm_3m_4^2+$$
$$+\frac{1}{6}qm_2m_3^2+\frac{1}{6}q^2m_3^3m_4-\frac{1}{6}pqm_2m_4^2)e_4.$$

Заключение

Проведенные исследования коммутативных и некоммутативных удвоений с помощью процедуры Грассмана-Клиффорда канонических гиперкомплексных числовых систем второй размерности, а также их обобщения на неканонические ГЧС, позволили получить широкие классы коммутативных и некоммутативных ГЧС четвертой размерности. Изучены алгебраические и функциональные свойства этих ГЧС. Получены выражения для сопряженных чисел, норм и делителей нуля в этих системах.

Полученные результаты позволяют использовать эти системы для математического моделирования различных прикладных задач.

В то же время установлено, что в общем случае обобщенные ГЧС четвертой размерности неассоциативны. Это вносит некоторые особенности при их использовании.

При выполнении работы авторы столкнулись со значительными техническими трудностями при выполнении преобразований громоздких символьных выражений. Еще в большей мере это относится к решению многомерных систем символьных линейных, нелинейных и дифференциальных уравнений. Получить результаты удалось только при использовании такой системы символьных вычислений как система Maple.

В свою очередь, это потребовало разработки библиотеки процедур обработки гиперкомплексных числовых выражений в символьном виде для целых классов ГЧС.

Эти разработки, на наш взгляд, представляют самостоятельный интерес для специалистов, применяющих в своих исследованиях гиперкомплексные числа. Авторы планируют в дальнейшем подготовить пакет библиотеки процедур обработки гиперкомплексных числовых выражений в символьном виде для распространения среди вышеназванных специалистов.

1. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. Москва: Наука, 1973. 144 с.
2. Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е., Туренко А.С. Исследование свойств обобщенных ги-

перкомплексных числовых систем четвертой размерности, полученных процедурой удвоения Грассмана-Клиффорда. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2016. Т. 18. № 3. С. 3–11.

3. Каліновський Я.О., Боярінова Ю.Є., Туренко А.С. Дослідження зв'язків між узагальненими кватерніонами та процедурою подвоєння Грасмана-Кліфорда. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2015. Т. 17. № 1. С. 36–45.

4. Синьков М.В., Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е. Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения. Киев: НАН Украины, Ин-т проблем регистрации информации, 2010. 389 с

5. Дьяконов В.П. Maple 6. Учебный курс. — СПб.: Питер, 2001. 608. с.

6. Голоскоков Д. П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. Изд-во: «Питер», 2004. 544 с.

7. Davis J.H. Differential Equations with Maple: An Interactive Approach. Birchauser, 2000. 417 p.

8. Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е. Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений. Киев: Инфодрук, 2012. 183 с.

9. Калиновский Я.А., Синькова Т.В. Изоморфизм коммутативных гиперкомплексных числовых систем и представления экспоненциальных функций в них. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2012. Т. 14. № 1. С. 10–24.

10. Mamagami A.B., Jafari M. Some Notes on Matrix of Generalized Quaternion. *International Research Journal of Applied and Basic Sciences*. 2013. Vol. 7. N 14. P. 1164–1171.

Поступила в редакцию 24.01.2017