

УДК 004.942; 512.554; 621.311

**С. И. Клипков**

Главный информационно-вычислительный центр НЭК «Укрэнерго»  
ул. С. Петлюры, 27, 01032 Киев, Украина

## **Использование гиперкомплексных числовых систем для математического моделирования предельных режимов электрических систем**

*Рассмотрены ограничения классической теории функций комплексного переменного для анализа комплексных уравнений установившегося режима электрических систем, обусловленные неаналитичностью комплексной мощности как функции комплексных напряжений. Показано, что вектор действительных комплексных составляющих гиперкомплексных решений отображается в подмножество области существования установившихся режимов с вырожденной комплексной матрицей первого приближения, при формировании которой используется понятие псевдопроизводной. Таким образом, существенно упрощается математическое моделирование предельных режимов электрических систем.*

**Ключевые слова:** гиперкомплексная числовая система, электрические системы, комплексная мощность, аналитическая функция.

### **Вступление**

В теории электрических цепей переменного тока широко используется предложенный Ч.П. Штейнмецем [1] символический метод расчета, основанный на изображении гармонических напряжений и токов комплексными числами, что позволяет при описании цепей переменного тока использовать формальную аналогию с описанием цепей постоянного тока. В рамках символического метода комплексными числами изображаются также параметры элементов электрических цепей, которые, в отличие от напряжений и токов, не являются гармоническими функциями. Это обусловлено тем, что корректное применение рассматриваемого метода распространяется не только на линейные операции с гармоническими функциями, но и на операции дифференцирования и интегрирования гармонических функций по времени. При этом дифференцирование гармонической функции соответствует умножению, а интегрирование делению ее комплексного изображения на постоянную величину  $j\omega$ , где  $j$  — мнимая единица, а  $\omega$  — угловая частота [2]. В результате выполнения указанных операций для индуктивных и ем-

© С. И. Клипков

костных элементов электрических цепей появляются реактивные составляющие, связанные с мнимой единицей, а действительные части комплексных сопротивлений и проводимостей называют активными составляющими. Таким образом, основные законы электрических цепей переменного тока, связывающие между собой токи и напряжения (законы Ома и Кирхгофа), записываются в комплексной форме.

### Математические свойства функции комплексной мощности

Следует отметить, что в электроэнергетике при расчетах установившихся режимов электрических систем (ЭС) в качестве исходных данных, в основном, используются электрические мощности (в отличие от теоретической электротехники, где расчеты электрических цепей выполняются, как правило, при заданных значениях источников э.д.с. и токов). Однако нелинейная алгебраическая операция умножения не может быть строго представлена в рамках комплексного метода, поскольку произведению синусоидального тока на синусоидальное напряжение нельзя поставить в соответствие произведение их комплексных изображений [3]. Действительно, умножая синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \phi_u)$  на синусоидальный ток  $i = I_m \sin(\omega t + \phi_i)$ , получим выражение для мгновенной электрической мощности, состоящее из постоянной составляющей, которая соответствует активной мощности, и переменной гармонической составляющей двойной частоты

$$p = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\phi_u - \phi_i) - \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i). \quad (1)$$

В свою очередь, умножая соответствующие напряжению и току комплексные гармонические функции, получим комплексную гармоническую функцию двойной частоты

$$U_m e^{j(\omega t + \phi_u)} I_m e^{j(\omega t + \phi_i)} = U_m I_m e^{j(2\omega t + \phi_u + \phi_i)}. \quad (2)$$

Поскольку переход от комплексной гармонической функции к действительной гармонической функции соответствует выделению ее мнимой составляющей, то в результате получим не совсем похожий на (1) результат  $U_m I_m \sin(2\omega t + \phi_u + \phi_i)$  [3]. Поэтому в рамках символического метода нельзя получить комплексное изображение мгновенной электрической мощности как произведение комплексного напряжения на комплексный ток. В то же время, отвлекаясь от физической сути происходящих электрических процессов, математическое выражение (2) может быть формально использовано для моделирования и решения прикладных задач электроэнергетики. В частности, переходя в (2) от комплексных гармонических функций к комплексным изображениям напряжения и тока, получим

$$\dot{U}I = UIe^{j(2\phi_u - \varphi)} = (UI \cos \varphi - jUI \sin \varphi)e^{j2\phi_u} = (P - jQ)e^{j2\phi_u}, \quad (3)$$

где  $\varphi = \phi_u - \phi_i$  — фазовый угол, на который ток отстает от напряжения или угол мощности;  $P$  — активная мощность, соответствующая постоянной составляющей в выражении (1);  $Q$  — так называемая реактивная мощность. Поскольку  $e^{j2\phi_u} = \frac{\dot{U}}{\hat{U}}$ , то из математического выражения (3) непосредственно следует формула вычисления широко используемого в электротехнике понятия комплексной мощности

$$\hat{S} = P - jQ = I\hat{U}. \quad (4)$$

Сравнивая (1) и (4) видим, что только активная мощность  $P = UI \cos \varphi$  имеет четкое физическое толкование, а реактивная мощность  $Q = UI \sin \varphi$  представляет собой искусственно введенную расчетную величину [4].

Таким образом, используемое в плане развития символического метода для электротехнических расчетов математическое понятие комплексной мощности, не являющейся изображением мгновенной электрической мощности (1), представляется в виде произведения сопряженного комплекса тока на комплекс напряжения [2]

$$\dot{S} = \hat{I}\dot{U}. \quad (5)$$

Следует также отметить, что иногда комплексную мощность определяют как произведение комплекса тока на сопряженный комплекс напряжения

$$\dot{S} = I\hat{U}. \quad (6)$$

Выражения (5), (6) отличаются знаком реактивной мощности. Поскольку реактивная мощность не имеет физического смысла, а ее знак имеет условный характер [2], то имевшие место дискуссии о предпочтительности той или иной записи с точки зрения автора не состоятельны. Оба выражения в равной степени могут быть использованы для построения уравнений баланса комплексных мощностей в узлах ЭС переменного тока. Однако и в том, и в другом случае функция комплексной мощности в произвольном  $f$ -м узле ЭС содержит нелинейные комбинации комплексов напряжений и их сопряженных значений. Так, используя выражение (5), получим уравнение небаланса комплексной мощности в виде [5]

$$\Delta \hat{S}_f = \hat{S}_f - \dot{Y}_f \dot{U}_f \hat{U}_f + \sum_{l=1}^n \dot{Y}_l \dot{U}_l \hat{U}_f = 0, \quad (7)$$

поскольку значение комплексного тока в узле ЭС вычисляется по законам Ома и Кирхгофа в соответствии с выражением  $\dot{I}_f = \dot{Y}_f \dot{U}_f - \sum_{l=1}^n \dot{Y}_l \dot{U}_l$ , где  $\dot{Y}_f = \sum_{l=1}^n \dot{Y}_l + \dot{Y}_{f0} =$

$= g_f + jb_f$  — собственная комплексная узловая проводимость узла  $f$ ;  
 $\dot{Y}_{fl} = g_{fl} + jb_{fl} = 1/\dot{Z}_{fl}$  — взаимные комплексные проводимости ветвей, соединяющих узел  $f$  со смежными узлами  $l$ ;  $\dot{Y}_{f0} = g_{f0} + jb_{f0}$  — суммарная комплексная проводимость шунтов в узле  $f$ ;  $n$  — количество смежных узлов.

Отметим, что в теории функций комплексного переменного нет инструментов для анализа таких функций, поскольку зависимость между комплексной величиной и ее сопряженным значением  $\dot{w} = \hat{z}$  не удовлетворяет условиям дифференцируемости Коши-Римана. Таким образом, в электроэнергетике, исторически сложилась ситуация, когда одна из основных функций, используемых для расчета и анализа режимов электрических систем, не удовлетворяет условиям аналитичности.

Для произвольной зависимости комплексной переменной  $\dot{w} = u + vi$  от другой комплексной переменной  $\dot{z} = x + yi$  отношение дифференциалов существует всегда, когда существуют частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$ .

Указанное соотношение может быть представлено в виде

$$\frac{d\dot{w}}{d\dot{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) i + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) i \right] e^{-2\varphi i}, \quad (8)$$

где  $i$  — мнимая единица;  $\varphi$  — угол дифференциала аргумента  $d\dot{z} = dx + dyi = \varepsilon e^{\varphi i}$ .

Из выражения (8) непосредственно следуют условия дифференцируемости Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (9)$$

требующие, чтобы связанная с углом  $\varphi$  составляющая была равна нулю, поскольку по определению производная не должна зависеть от дифференциала аргумента или, другими словами, от способа стремления приращения аргумента к нулю. Что касается зависимости  $\dot{w} = \hat{z}$ , то для нее все необходимые частные производные существуют:  $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$ . Однако первое из условий (9) не выполняется, поскольку соответствующее соотношение частных производных равняется не нулю, а двум. В результате для рассматриваемой функции отношение дифференциалов имеет вид:

$$\frac{d\dot{w}}{d\dot{z}} = e^{-2\varphi i}. \quad (10)$$

Зависящее от угла дифференциала аргумента отношение дифференциалов (10) предложено называть псевдопроизводной [5]. Введение такого понятия позволяет сформулировать подход к анализу функций комплексного переменного, которые в качестве аргументов включают в себя и комплексные числа, и их сопряженные значения, расширяя, таким образом, возможности комплексного анализа исторически сложившейся в энергетике зависимости между комплексной мощностью и комплексными напряжениями.

### **Линеаризация системы нелинейных комплексных уравнений**

Рассмотрим применение указанного подхода для анализа предельных режимов ЭС методом первого приближения, который основан на линеаризации системы нелинейных комплексных уравнений (7).

Система нелинейных комплексных уравнений (7) описывает установившийся режим ЭС переменного тока и широко используется в практике электроэнергетических расчетов для определения комплексных напряжений при заданных параметрах электрической сети и известных комплексных мощностях в узлах ЭС. Можно выделить следующие характерные особенности рассматриваемой системы комплексных уравнений, обусловленные наличием в их составе нелинейных комбинаций комплексных напряжений и их сопряженных значений.

1. Ограниченная область существования комплексных решений. В отличие от комплексных квадратичных форм, не содержащих сопряженных комплексных переменных, система комплексных уравнений (7) в зависимости от конкретного сочетания исходных данных может не иметь комплексных решений. Поскольку в этом случае не существует ни одного сочетания комплексных чисел, которое бы удовлетворяло уравнениям рассматриваемой системы, то используемые для решения данной нелинейной задачи итерационные процессы в поле комплексных чисел не сходятся. Для обеспечения сходимости вычислительных процедур при отсутствии комплексных решений можно увеличить область поиска решений, используя гиперкомплексные числовые системы ранга два над полем комплексных чисел [5–12]. Рассматриваемый подход аналогичен ситуации, когда при отсутствии действительных решений обычного квадратного уравнения с действительными коэффициентами, искомые решения можно получить, используя поле комплексных чисел как алгебраическое расширение поля действительных чисел.

2. Поскольку функция  $\Delta \hat{S}_f$  комплексных переменных  $\dot{U}_f, \hat{U}_f, \dot{U}_l$  (7) не дифференцируема в обычном смысле, то одним из подходов, традиционно используемых для вычисления матрицы первого приближения (матрицы Якоби)  $\mathbf{J} = (J_{fl})$ , является переход к действительной форме уравнений, по отдельности формирующим баланс активных и реактивных мощностей в узлах ЭС:

$$\Delta P_f = 0, \Delta Q_f = 0. \quad (11)$$

В настоящее время широкий круг задач управления режимами ЭС решается на основании анализа предельных решений системы уравнений (11), отождеств-

ляемых с точками равно нулю определителя  $D$  (якобиана) матрицы  $\mathbf{J}$  [13]. Множество указанных точек образует дискриминантную гиперповерхность  $\mathcal{R}$ , которая в пространстве независимых переменных  $P_f, Q_f$  ограничивает существование отдельных пар решений с разными знаками якобиана [14].

Используя понятие псевдопроизводной (10), для функций узловых небалансов  $\Delta\hat{S}_f$  (7) комплексных переменных  $\dot{U}_f, \dot{U}_l$  и  $\hat{U}_f$  также может быть построена комплексная матрица первого приближения  $\mathbf{J} = (J_{fl})$ , поскольку все необходимые отношения дифференциалов в рассматриваемом случае существуют. Учитывая, что отношение дифференциалов  $\frac{d\hat{U}_f}{dU'_f} = e^{-j2\alpha_f}$ , где  $\alpha_f = \arctg \frac{dU''_f}{dU'_f}$  — угол комплексного дифференциала напряжения  $d\dot{U}_f$ , то диагональные элементы такой матрицы определяются по формулам

$$J_{ff} = \frac{\partial \Delta\hat{S}_f}{\partial \dot{U}_f} = \dot{Y}_f \hat{U}_f + \dot{I}_f e^{-j2\alpha_f}. \quad (12)$$

Недиагональные элементы рассматриваемой матрицы определяются путем простого дифференцирования, поскольку функции небалансов  $\Delta\hat{S}_f$  не содержат сопряженных значений комплексных напряжений смежных узлов

$$J_{fl} = \frac{\partial \Delta\hat{S}_f}{\partial \dot{U}_l} = -\dot{Y}_{fl} \hat{U}_f. \quad (13)$$

Таким образом, в рамках метода первого приближения, линеаризованная система нелинейных комплексных уравнений (7) может быть записана в матричном виде

$$\Delta\hat{\mathbf{S}} \approx \mathbf{J} \Delta\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{0},$$

где  $\Delta\hat{\mathbf{S}} = (\Delta\hat{S}_f)$  — вектор небалансов сопряженной комплексной мощности;  $\Delta\dot{\mathbf{U}} = (\Delta\dot{U}_f)$  — вектор приращений комплексных напряжений.

Как следует из выражения (12), каждый диагональный элемент матрицы  $\mathbf{J}$  зависит от угла  $\alpha_f$  дифференциала комплексного напряжения  $d\dot{U}_f$ . Поэтому в отличие от предельного условия  $D = \det \mathbf{J} = 0$ , предельное условие  $\dot{D} = \det \dot{\mathbf{J}} = 0$  определяется не только значениями напряжений в соответствующем режиме, но и значениями углов  $\alpha_f$ , совокупность которых можно трактовать как направление изменения режима в данной точке.

## Гиперкомплексные обобщения комплексных уравнений установившихся режимов

Рассмотрим теперь гиперкомплексные обобщения комплексных уравнений установившихся режимов (7)

$$\Delta \dot{S}_f = \hat{S}_f - \dot{Y}_f \vec{U}_f \vec{U}_f + \sum_{l=1}^n \dot{Y}_{fl} \vec{U}_l \vec{U}_f = 0, \quad (14)$$

где комплексные напряжения заменены универсальными гиперкомплексными числами  $\vec{U}_f = \dot{U}_{of} + \dot{U}_{mf}i$ , а сопряженные значения комплексных напряжений – частично-сопряженными универсальными гиперкомплексными числами  $\vec{U}_f = \hat{U}_{of} + \hat{U}_{mf}i$ . Таким образом, используемые гиперкомплексные числа являются алгеброй второго ранга над полем комплексных чисел и представляются в виде действительных ( $\dot{U}_{of}$ ) и мнимых ( $\dot{U}_{mf}$ ) комплексных составляющих [5].

Умножение универсальных гиперкомплексных чисел выполняется по правилу [12]

$$(\dot{A}_o + \dot{A}_m i)(\dot{B}_o + \dot{B}_m i) = \dot{A}_o \dot{B}_o - \dot{A}_m \dot{B}_m e^{-j2k\alpha_m} + (\dot{A}_o \dot{B}_m + \dot{A}_m \dot{B}_o e^{-j2k\alpha_o})i, \quad (15)$$

где  $\alpha_m = \arctg \frac{B''_m}{B'_m}$  — угол комплексного числа  $\dot{B}_m$ ;  $\alpha_o = \arctg \frac{B''_o}{B'_o}$  — угол комплексного числа  $\dot{B}_o$ ;  $k$  — параметр универсальной гиперкомплексной системы, который в рассматриваемом случае является действительным числом. В [5, 12] показано, что при значении  $k = 0$  универсальная гиперкомплексная система соответствует квадриплексным числам, а при  $k = 1$  — кватернионам.

Умножая гиперкомплексные числа в уравнении (14) в соответствии с (15), и группируя их относительно мнимой единицы  $i$ , получим два комплексных уравнения, одно из которых может быть преобразовано к виду [5]

$$(\dot{Y}_f \hat{U}_{of} + \dot{I}_{of} e^{-j2(k\alpha_{of} + \alpha_{mf})}) \dot{U}_{mf} - \sum_{l=1}^n \dot{Y}_{fl} \hat{U}_{of} \dot{U}_{ml} = 0. \quad (16)$$

Система уравнений (16) для всех независимых узлов ЭС соответствует матричному уравнению

$$\dot{A} \dot{U}_m = 0, \quad (17)$$

где  $\dot{A}$  — комплексная матрица перехода к мнимым составляющим гиперкомплексного решения;  $\dot{U}_m$  — вектор мнимых составляющих гиперкомплексного решения. При этом в соответствии с (16) элементы матрицы  $\dot{A}$  вычисляются по формулам:

$$\dot{A}_{ff} = \dot{Y}_f \hat{U}_{of} + \dot{I}_{of} e^{-j2(k\alpha_{of} + \alpha_{mf})}, \quad (18)$$

$$\dot{A}_{fl} = -\dot{Y}_{fl} \hat{U}_{of}. \quad (19)$$

Как следует из матричного соотношения (17), в точках гиперкомплексного решения, характеризующегося наличием мнимых составляющих, определитель комплексной матрицы перехода  $\dot{A}$  равен нулю, а вектор мнимых комплексных составляющих  $\dot{U}_m$  является собственным вектором указанной матрицы, соответствующим нулевому собственному числу.

Сопоставляя выражения (12), (13) и (18), (19) приходим к выводу, что комплексная матрица перехода к мнимым составляющим  $\dot{A}$  в точности соответствует комплексной матрице первого приближения  $\dot{J}$ , если углы, определяющие направление изменения режима  $\alpha_f$  соответствуют выражению

$$\alpha_f = k\alpha_{of} + \alpha_{mf}. \quad (20)$$

Таким образом, в точке области существования установившихся режимов, соответствующей действительным комплексным составляющим гиперкомплексного решения (отображение вектора  $\dot{U}_{of}$  в пространство  $P_f, Q_f$  однозначно) всегда существует направление изменения режима (20), при котором определитель матрицы первого приближения  $\dot{J}$  принимает нулевое значение. Вместе с тем, поскольку элементы вектора мнимых комплексных составляющих  $\dot{U}_m$  связаны с углами  $\alpha_{mf}$ , то только при значении параметра  $k=0$  можно найти вектор комплексных приращений узловых напряжений  $\dot{D}\dot{U}$ , который является собственным вектором матрицы  $\dot{J}$ , соответствующим ее нулевому собственному числу. При всех остальных значениях  $k$  направление изменения режима (углы  $\alpha_f$ ), приводящее к вырождению матрицы  $\dot{J}$ , и направление изменения режима, связанное с собственным вектором, соответствующим ее нулевому собственному числу, в общем случае не совпадают.

Поскольку значение параметра  $k=0$  соответствует квадриплексным числам, то установившийся режим, соответствующий действительным комплексным составляющим  $\dot{U}_{of}^{kd}$  квадриплексного решения, всегда принадлежит дискриминантной гиперповерхности  $\mathfrak{R}$  [5].

Как уже отмечалось выше, для кватернионов значение параметра  $k=1$ . Поэтому установившиеся режимы, соответствующие действительным комплексным составляющим  $\dot{U}_{of}^{kg}$  кватернионных решений, характеризуются тем, что для каждого из них всегда существует направление изменения режима, при котором матрица  $\dot{J}$  вырождается. Однако при этом направлении изменения режима в общем случае нельзя найти собственный вектор, который соответствовал бы ее нулевому собственному числу. Поэтому указанные режимы не принадлежат дискриминантной гиперповерхности  $\mathfrak{R}$ , а находятся во внутренних точках области существова-



ния установившихся режимов [5]. Такая же ситуация возникает и с гиперкомплексными решениями, соответствующими значениям параметра  $k$ , отличным от нуля и единицы.

Отметим, что множество гиперкомплексных числовых систем с правилом умножения (15) при  $k \neq 0$ ,  $k \neq 1$  представляет собой сложные некоммутативные, неассоциативные алгебры [12], тем не менее, позволяющие получить в некотором диапазоне изменения параметра  $k$  решения системы уравнений (14) для конкретной расчетной ситуации. Использование в данном случае неассоциативных числовых систем с точки зрения построения вычислительных алгоритмов упрощается тем обстоятельством, что в цепочке из двух умножений в уравнении (14) левый сомножитель является комплексным числом. Кроме того, левая часть указанного уравнения также является комплексным числом.

Множество точек области существования режимов, в которых существуют направления изменения режима, приводящие к вырождению матрицы  $\mathbf{J}$ , обозначим  $\mathfrak{Z}$ . Очевидно, что точки дискриминантной гиперповерхности  $\mathfrak{R}$  являются подмножеством  $\mathfrak{Z}$ .

Таким образом, использование для анализа предельных режимов комплексной матрицы первого приближения  $\mathbf{J}$  расширяет область режимов, которые с точки зрения метода первого приближения можно отнести к предельным. При движении в области существования режимов к дискриминантной поверхности (утяжеление режима) вначале появляются точки множества  $\mathfrak{Z}$ . В этих точках для одного из пары решений системы уравнений (7) можно найти направление изменения режима (вектор углов  $\alpha_f$ ), при котором определитель рассматриваемой комплексной матрицы становится равным нулю. Однако в указанном направлении изменения режима нельзя найти собственный вектор матрицы  $\mathbf{J}$  (вектор  $\Delta \dot{U}_f$ ), соответствующий ее нулевому собственному числу. Такая ситуация наблюдается во всех точках множества  $\mathfrak{Z}$ , не принадлежащих  $\mathfrak{R}$ . И только в точках дискриминантной гиперповерхности  $\mathfrak{R}$ , соответствующих  $k = 0$ , появляется такое направление изменения режима, при котором одновременно и определитель комплексной матрицы  $\mathbf{J}$  становится равным нулю ( $\dot{D} = 0$ ), и существует собственный вектор, соответствующий нулевому собственному числу этой матрицы. В точках  $\mathfrak{R}$  наблюдается бифуркация пары комплексных решений, связанная с ее перерождением в пару квадриплексных решений.

### **Пример расчета установившегося режима с использованием гиперкомплексных уравнений**

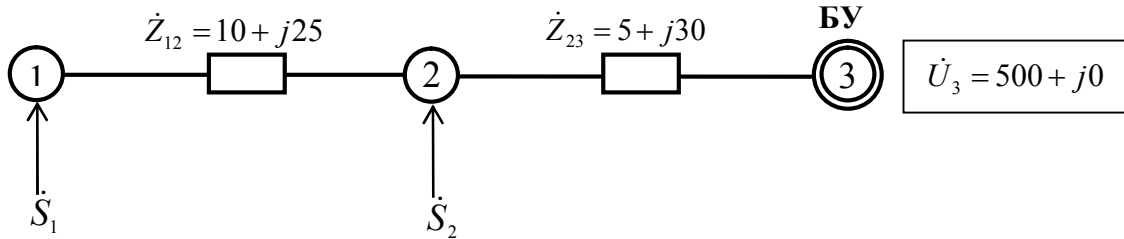
Обратимся к числовому примеру, который рассматривался в [15].

Для анализируемой схемы комплексная матрица первого приближения выглядит следующим образом

$$\begin{pmatrix} \dot{Y}_1 \hat{U}_1 + I_1 e^{-j2\alpha_1} & -\dot{Y}_{12} \hat{U}_1 \\ -\dot{Y}_{12} \hat{U}_2 & \dot{Y}_2 \hat{U}_2 + I_2 e^{-j2\alpha_2} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

а равенство нулю определителя матрицы (21) определяется уравнением:

$$\dot{Y}_{12}\dot{Y}_{23}\hat{U}_1\hat{U}_2 + \dot{Y}_1\hat{U}_1\dot{I}_2e^{-j2\alpha_2} + \dot{Y}_2\hat{U}_2\dot{I}_1e^{-j2\alpha_1} + \dot{I}_1\dot{I}_2e^{-j2\alpha_1}e^{-j2\alpha_2} = 0. \quad (22)$$



Расчетная схема 3-узловой ЭС

Из уравнения (22) следует соотношение

$$e^{-j2\alpha_1} = \frac{\dot{A} + \dot{B}e^{-j2\alpha_2}}{\dot{C} + \dot{D}e^{-j2\alpha_2}}, \quad (23)$$

где  $\dot{A} = -\dot{Y}_{12}\dot{Y}_{23}\hat{U}_1\hat{U}_2$ ;  $\dot{B} = -\dot{Y}_1\hat{U}_1\dot{I}_2$ ;  $\dot{C} = \dot{Y}_2\hat{U}_2\dot{I}_1$ ;  $\dot{D} = \dot{I}_1\dot{I}_2$ .

Значение угла  $\alpha_2$  можно определить из условия равенства единице модуля комплексного числа в правой части соотношения (23):

$$\alpha_2 = 0,5 \left[ \beta - \arcsin \left( \frac{-A^2 - B^2 + C^2 + D^2}{E} \right) \right], \quad (24)$$

где  $E = 2\sqrt{A^2B^2 + C^2D^2 - 2ABCD\cos(\varphi_A - \varphi_B - \varphi_C + \varphi_D)}$ ;

$$\beta = \arctg \frac{AB\cos(\varphi_A - \varphi_B) - CD\cos(\varphi_C - \varphi_D)}{AB\sin(\varphi_A - \varphi_B) - CD\sin(\varphi_C - \varphi_D)};$$

$A, B, C, D, \varphi_A, \varphi_B, \varphi_C, \varphi_D$  — модули и углы комплексных чисел в выражении (23).

Как следует из выражения (24), в зависимости от значения величины под знаком  $\arcsin$ , в исследуемой точке области существования режимов может быть два значения углов  $\alpha_1, \alpha_2$ , при которых определитель (22) обращается в ноль, или одно, или ни одного.

Рассмотрим точку  $\dot{S}_1 = 7000 + j3000$ ,  $\dot{S}_2 = 3000 + j1000$ , расположенную вне области существования установившихся режимов анализируемой трехузловой ЭС. Исследуем три гиперкомплексных решения в данной точке, при значениях параметра гиперкомплексной системы  $k = 1$  (кватернионы),  $k = 0,5$ ,  $k = 0$  (квадриплексные числа). Результаты соответствующих расчетов представлены в табл. 1, 2.

Таблица 1. Гиперкомплексные решения уравнений установившегося режима

	$k = 1$	$k = 0,5$	$k = 0$
$\vec{U}_1$	$216,36 + j543,32 +$ $+(201,76 - j406,57)i$	$217,53 + j723,75 +$ $+(294,14 - j203,2)i$	$200,55 + j863,7 +$ $+(575,37 + j15,99)i$
$\vec{U}_2$	$302,87 + j342,31 +$ $+(147,57 - j245,61)i$	$292,92 + j449,88 +$ $+(191,16 - j116,88)i$	$283,79 + j526,26 +$ $+(349,78 + j19,17)i$

Таблица 2. Углы направлений изменения режима, соответствующие условию  $\det \mathbf{J} = 0$

	$k = 1$	$k = 0,5$	$k = 0$
$\alpha_1$	$4,679^\circ$	$1,997^\circ$	$1,592^\circ$
$\alpha_2$	$-10,503^\circ$	$-2,977^\circ$	$3,136^\circ$
$\alpha_1^1$	$4,679^\circ$	$1,997^\circ$	$1,592^\circ$
$\alpha_2^1$	$-10,503^\circ$	$-2,977^\circ$	$3,136^\circ$
$\alpha_1^2$	$3,795^\circ$	$3,559^\circ$	$6,029^\circ$
$\alpha_2^2$	$-7,655^\circ$	$-8,109^\circ$	$-14,482^\circ$

В табл. 1 показаны гиперкомплексные напряжения  $\vec{U}_f$  в узлах 1 и 2, а в табл. 2 — в этих же узлах приведены углы направления изменения режима  $\alpha_f$ , при которых комплексный определитель (22) становится равным нулю. При этом в строках 2, 3 указанные углы определены по формуле (20), исходя из углов  $\alpha_{of}$ ,  $\alpha_{mf}$  комплексных составляющих  $\dot{U}_{of}$ ,  $\dot{U}_{mf}$  гиперкомплексных решений, а в строках 4–7 два направления изменения режима получены на основании выражений (23), (24) в точках области существования режимов, соответствующих комплексному вектору напряжений  $\dot{U}_f = \dot{U}_{of}$ .

Как следует из рассматриваемых результатов расчетов, гиперкомплексные решения в исследуемой точке дают возможность определить одно из направлений изменения режима (углы  $\alpha_1^1$ ,  $\alpha_2^1$ ), соответствующее условию  $\dot{D} = \det \mathbf{J} = 0$ . Для получения направления изменения режима с углами  $\alpha_1^2$ ,  $\alpha_2^2$  необходимо рассматривать гиперкомплексные решения в других точках вне области существования установившихся режимов с другими значениями параметра гиперкомплексной системы  $k$  [15].

## Выводы

1. Распространение символического (комплексного) метода на нелинейную операцию умножения гармонических напряжений и токов привело к возникновению математического понятия комплексной мощности, которая определяется как произведение комплексного напряжения на сопряженное значение комплексного тока. Поэтому комплексная мощность, как функция комплексных напряжений, не удовлетворяет условиям дифференцируемости Коши-Римана (9), что не позволяет

использовать для анализа комплексных уравнений установившегося режима ЭС (7) методы классической теории функций комплексного переменного. В этих условиях исследование предельных свойств системы указанных уравнений (7) может выполняться путем анализа комплексной матрицы первого приближения  $\mathbf{J}$ , построение которой осуществляется с использованием понятия псевдопроизводной (10).

2. Гиперкомплексные уравнения установившегося режима (14) являются уравнениями предельных режимов, поскольку вектор действительных комплексных составляющих  $\dot{U}_{of}$  гиперкомплексных решений универсальной системы гиперкомплексных чисел  $\vec{U}_f$  отображается во множество  $\mathfrak{Z}$  области существования режимов, с которым связано вырождение матрицы  $\mathbf{J}$ . При этом углы изменения режима  $\alpha_f$ , соответствующие условию  $\det \mathbf{J} = 0$ , могут быть определены из гиперкомплексных решений на основании (20).

1. Белькинд Л.Д. Чарльз Протеус Штейнмец / Л.Д. Белькинд. — М.: Наука, 1965.
2. Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники. Т. 1 / К.М. Поливанов. — М.: Энергия, 1972. — 240 с.
3. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. — М.: Наука, 1964. — 771 с.
4. Кизилов В.У. О понятии «реактивная мощность» / В.У. Кизилов, А.Д. Светелик // Энергетика и электрификация. — 2005. — № 2. — С. 35–38.
5. Клипов С.И. К вопросу математического моделирования предельных режимов электрических систем переменного тока / С.И. Клипов // Электрические сети & системы. — 2009. — № 5. — С. 36–46.
6. Кантор И.Л. Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. — М.: Мир, 1984. — 144 с.
7. Синьков М.В. Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Ю.Е. Бояринова, Я.А. Калиновский. — К.: Инфодрук, 2010. — 388 с.
8. Калиновский Я.А. Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений / Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова. — К.: Инфодрук, 2012. — 183 с.
9. Щербина Ю.В. Об одном методе исследования существования установившихся режимов электрических систем / Ю.В. Щербина, А.В. Задерей, С.И. Клипов // Электронное моделирование. — 1984. — № 5. — С. 61–64.
10. Веников В.А. Анализ системных каскадных аварий с использованием гиперкомплексных обобщений / В.А. Веников, Ю.В. Щербина, С.И. Клипов // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. — 1988. — № 1. — С. 10–14.
11. Калиновский Я.А. Исследования свойств изоморфизма квадриплексных и бикомплексных числовых систем / Я.А. Калиновский // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2003. — Т. 5, № 1. — С. 69–73.
12. Клипов С.И. О новом подходе к построению гиперкомплексных числовых систем ранга два над полем комплексных чисел / С.И. Клипов // Укр. Мат. Журн. — 2011. — 63, № 1. — С. 130–139.

13. *Конторович А.М.* Уравнения предельных режимов электроэнергетических систем и построение областей устойчивости / А.М. Конторович, М.К. Лукина // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. — 1988. — № 1. — С. 15–24.

14. *Васин В.П.* Структура множества установившихся режимов электроэнергетической системы / В.П. Васин // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. — 1981. — № 4. — С. 59–71.

15. *Клипов С.И.* Использование гармонического подхода к анализу предельных режимов электрических систем переменного тока / С.И. Клипов // Электрические сети & системы. — 2010. — № 6. — С. 71–82.

Поступила в редакцию 26.11.2012