

УДК 519.816

В. В. Циганок

Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Елементи комбінаторного підходу при визначенні спектрального коефіцієнта узгодженості експертних парних порівнянь

Спектральний підхід є одним із найбільш теоретично обґрунтованих підходів до визначення узгодженості множини експертних парних порівнянь при підтримці прийняття рішень у слабо структурованих предметних областях. З метою підвищення достовірності визначення спектрального коефіцієнта узгодженості для матриць парних порівнянь пропонується більш повне використання інформації, закладеної в матрицях, застосовуючи елементи комбінаторного підходу до формування складових спектрів. Застосування даного підходу дозволяє уникати зайвих звернень до експертів під час організації зворотного зв'язку для досягнення достатнього рівня узгодженості.

Ключові слова: експертне оцінювання, парні порівняння, спектральний підхід до визначення узгодженості, комбінаторний підхід до визначення ваг альтернатив, підтримка прийняття рішень.

Вступ

У слабо структурованих предметних областях, де об'єктивна інформація для прийняття рішень зазвичай не в достатній кількості, єдиним джерелом інформації залишається звернення до експертів, які володіють знаннями в даній предметній області. При застосуванні технологій підтримки прийняття рішень (ППР) на рівні великих підприємств, галузей, регіонів виділяють наступні основні етапи, пов'язані з відповідними задачами:

- 1) відбір груп експертів для проведення експертизи (для кожного окресленого питання при побудові моделі предметної області може бути призначено окрему групу експертів);
- 2) отримання знань від експертів;
- 3) обробка та узагальнення отриманих експертних знань;
- 4) генерування висновків для особи, що приймає рішення (переважно мається на увазі оцінювання варіантів можливих рішень на основі узагальнених експертних знань);

© В. В. Циганок

5) застосування результатів оцінювання (отриманих на попередньому етапі).

Однією із обов'язкових задач на етапі обробки експертних знань є визначення рівня узгодженості експертних оцінок, оскільки для отримання достовірних узагальнених оцінок індивідуальні оцінки експертів мають бути достатньою мірою узгодженими. Наряду з відомим підходом до визначення рівня узгодженості, котрий створювався для методу аналізу ієрархій і базується на статистичних моделях [1, 2], варто виділити спектральний підхід, запропонований В.Г. Тоценком [3, 4], який є чи не найбільш теоретично обґрунтованим серед існуючих. Сутність підходу полягає в поданні складових кожної підсумкової оцінки, заокруглених до найближчих поділок деякої обмеженої цілочислової шкали, у вигляді спектра, з подальшим обчисленням його коефіцієнта узгодженості. Особливою перевагою підходу є теоретичне обґрунтування обчислення міри достатності узгодженості експертних оцінок, яка для можливості їхнього узагальнення визначається досягненням коефіцієнтом узгодженості так званого порогу застосування, що обчислюється як показник узгодженості особливим чином побудованого спектра.

Формулу визначення спектрального коефіцієнта запропоновано в декількох варіантах залежно від подальшого способу агрегації експертних оцінок (середнє арифметичне чи середнє геометричне) та з урахуванням рівня компетентності експертів чи без його врахування [5]. Цей вираз враховує поставлені заздалегідь вимоги до коефіцієнта, такі як незмінність його при зміщенні всіх складових спектра R впродовж шкали, чутливість до кількості груп складових спектра та до кількості складових у кожній із груп тощо і, для варіанта агрегації оцінок, як середнього арифметичного та без урахування компетентності експертів, виглядає наступним чином:

$$k_c(R) = \left(\frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n r_i |i - a| - \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{m} \ln \frac{r_i}{m}}{G \sum_{i=1}^n |i - (n+1)/2| + \ln n} \right) z, \quad (1)$$

де $G = \frac{m}{\ln(m)n \ln(n)}$ — масштабний коефіцієнт; $z = \begin{cases} 1, & \text{якщо } z^* = TRUE, \\ 0, & \text{якщо } z^* = FALSE, \end{cases}$ при тому, що z^* — булева функція, що задає необхідні і достатні умови рівності коефіцієнта $k_c(R)$ нулю: $z^* = \overline{[i(1) = 1]} \sqrt{[i(q) = n]} \sqrt{[r_{i(d)} = r_{i(d+1)}]} \sqrt{[i(d) - i(d+1)]} = \text{const}$;

a — середнє арифметичне оцінок, що формують узагальнену оцінку; n — кількість поділок шкали; m — кількість складових спектра; q — кількість груп однакових складових; $i(d)$ — номер поділки шкали, до якої заокруглено оцінки d -ї групи, $d = (1, q)$; $r_{i(d)}$ — кількість оцінок, що заокруглені до поділки з номером $i(d)$.

Для визначення наявності корисної інформації у множині експертних оцінок та міри достатності узгодженості такої множини, введені, відповідно, поріг виявлення та поріг застосування експертної інформації. Поріг виявлення для заданої кількості поділок шкали обчислюється як коефіцієнт узгодженості спектра, що

несе мінімальну кількість корисної інформації (мінімальним чином відрізняється від рівномірного розподілу експертних оцінок — інформаційного шуму). Поріг застосування (міра достатності узгодженості для виконання агрегації) обчислюється як показник узгодженості двох експертних оцінок, що відповідають складовим спектра, віддаленим одна від іншої на одну поділку шкали.

При застосуванні методу парних порівнянь для оцінювання множини альтернатив, з метою підвищення достовірності оцінок, що надаються експертами, формується так звана матриця парних порівнянь (МПП), і для знаходження узгодженості оцінок, що складають дану МПП, формуються спектри, до кожного з яких включаються складові, відповідні кожній вазі альтернативи з оцінюваної множини. Причому, у кожному такому спектрі, кожна його складова визначається за одним із рядків або ж за відповідним однойменним стовпцем МПП. У рамках даного дослідження було відмічено неповне використання інформації про переваги альтернатив, що міститься в початковій заданій МПП і, як наслідок, знайдено можливість підвищити достовірність визначення показника узгодженості за рахунок найбільш повного використання інформації з МПП.

Сутність запропонованого підходу

Задля підвищення достовірності визначення показника узгодженості пропонується застосувати комбінаторний підхід до визначення ваг альтернатив за МПП [6, 7], котрий передбачає визначення складових, що входять до спектра деякої узагальненої оцінки не лише за рядками або стовпцями МПП (як пропонується у [3]), а за всіма можливими інформаційно-вагомими множинами елементів таких матриць. Фактично пропонується складові спектра будувати за кожним покривним (кістяковим, каркасним) деревом графа, поставленого у відповідність МПП. Тоді кожному покривному дереву ставиться у відповідність ідеально узгоджена МПП, за якою визначаються складові кожного спектра.

Загальна кількість таких покривних дерев у повному графі, що відповідає повній МПП, за теоремою Кейлі [8], дорівнює n^{n-2} , у загальному ж випадку — неповних парних порівнянь (не повного графа), кількість покривних дерев можна визначити, скориставшись Матричною теоремою Кірхгофа про дерева [9]. Побудувати покривне дерево можна за допомогою будь-якого з алгоритмів обходу графа, наприклад, пошук у глибину або пошук у ширину. Доведено, що кількість дуг у кожному такому покривному дереві рівна $(n - 1)$.

Передбачається, що достовірність, а разом з тим і точність визначення коефіцієнта узгодженості, підвищуються за рахунок збільшення кількості інформації, що обробляється при обчисленні цього показника.

Порівняльний приклад обчислення коефіцієнтів узгодженості

Продемонструємо обчислення коефіцієнта узгодженості запропонованим способом на характерному прикладі та порівняємо результати з обчисленими традиційно.

Нехай табл. 1 містить обернено симетричну МПП A чотирьох альтернатив, отриману в результаті мультиплікативних порівнянь, виконаних деяким експер-

том. Завдяки властивості оберненої симетричності ($a_{ij} = 1/a_{ji}$) будемо брати до уваги лише елементи, що розміщені вище головної діагоналі МПП.

Таблиця 1. Вихідна МПП A

	1	2	3	4
1	1	1/2	1/3	1/4
2	2	1	2/3	3
3	3	1 1/2	1	5
4	4	1/3	1/5	1

Кількість поділок шкали виберемо рівною десяти ($n = 10$). Оскільки МПП A — повністю заповнена, то згідно з теоремою Кейлі визначаємо загальну кількість варіантів покривних дерев, що можуть бути сформовані за повним неорієнтованим графом з 4-ма вершинами: $4^{(4-2)} = 16$ (табл. 2). Кожному дереву ставиться у відповідність ідеально узгоджена МПП, побудована на базі трьох ($4 - 1 = 3$), так званих інформаційно-вагомих елементів матриці A , які відповідають дугам із покривного дерева.

Таблиця 2. Ідеально узгоджені МПП, сформовані за відповідними покривними деревами

№ МПП	Ідеально узгоджені МПП				Вигляд дерева
1	1	1/2	1/3	1/4	
2	1	1/2	1/3	1 1/2	
3	1	1/2	1/3	1 2/3	
4	1	1/2	1/3	1/4	
5	1	1/2	1/20	1/4	
6	1	1/2	1/3	1 1/2	
7	1	1/2	1/3	1 2/3	
8	1	1/2	2/7	1 1/2	
9	1	1/2	1/3	1/4	
10	1	1/12	1/3	1/4	
11	1	1/2	1/3	1 1/2	
12	1	1/2	1/3	1 2/3	
13	1	5/9	1/3	1 2/3	
14	1	1/12	1/18	1/4	
15	1	3/40	1/20	1/4	
16	1	1/12	1/20	1/4	

- значення із матриці A

До речі, в загальному вигляді, побудовані таким чином ідеально узгоджені матриці можуть повторюватись, а при повній узгодженості вихідної МПП A навіть усі співпадають. За кожною такою МПП із 16-ти, що в табл. 2, знаходяться ваги альтернатив, і їхні заокруглені значення вважаються компонентами спектра. Оскільки шкала з 10-ма поділками починається з «1», то заокруглення компонентів ваг проводиться до найближчої більшої поділки шкали. Усі, визначені описаним способом значення, зведено до табл. 3, на рис. 1 показано спектри, що відповідають цим значенням.

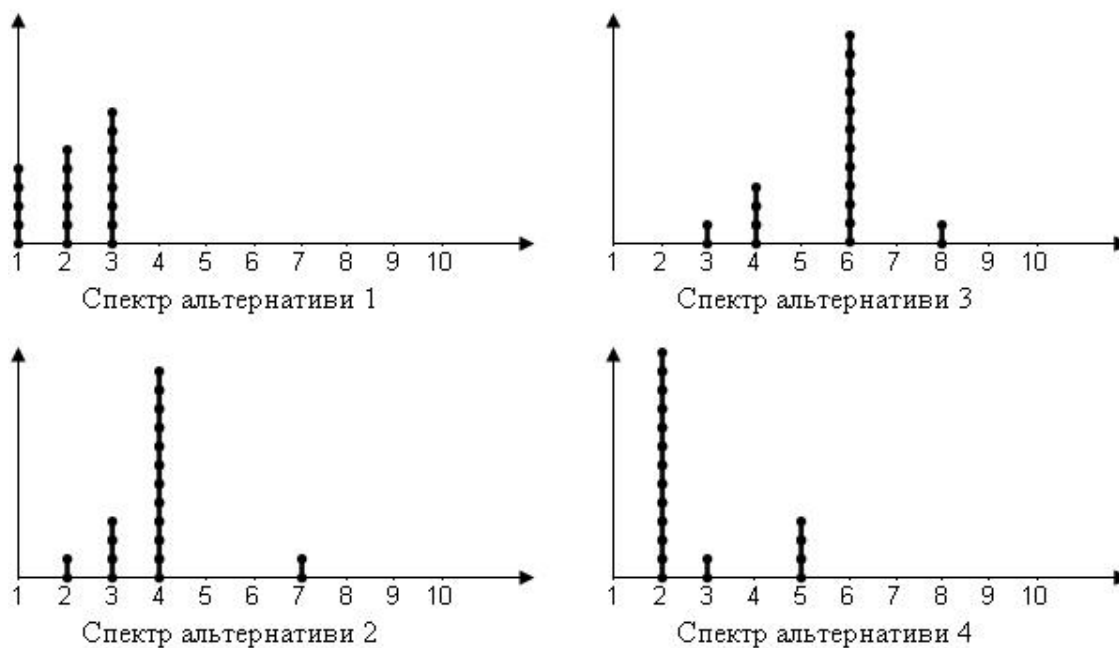


Рис. 1. Спектри ваг альтернатив при застосуванні комбінаторного підходу

Таблиця 3. Значення складових ваг альтернатив, визначених за відповідними ідеально узгодженими МПП (точні та заокруглені до найближчої поділки шкали)

№ ідеально узгодженої МПП	Значення складової ваги							
	альтернативи 1		альтернативи 2		альтернативи 3		альтернативи 4	
	Точне	Заокруглене	Точне	Заокруглене	Точне	Заокруглене	Точне	Заокруглене
1	0,1	2	0,2	3	0,3	4	0,4	5
2	0,15	3	0,3	4	0,45	6	0,1	2
3	0,151515	3	0,30303	4	0,454545	6	0,090909	2
4	0,1	2	0,2	3	0,3	4	0,4	5
5	0,037037	1	0,074074	2	0,740741	8	0,148148	2
6	0,15	3	0,3	4	0,45	6	0,1	2
7	0,151515	3	0,30303	4	0,454545	6	0,090909	2

Продовження табл. 3

8	0,142857	2	0,285714	4	0,47619	6	0,095238	2
9	0,1	2	0,2	3	0,3	4	0,4	5
10	0,05	2	0,6	7	0,15	3	0,2	3
11	0,15	3	0,3	4	0,45	6	0,1	2
12	0,151515	3	0,30303	4	0,454545	6	0,090909	2
13	0,15625	3	0,28125	4	0,46875	6	0,09375	2
14	0,028571	1	0,342857	4	0,514286	6	0,114286	2
15	0,026087	1	0,347826	4	0,521739	6	0,104348	2
16	0,027027	1	0,324324	4	0,540541	6	0,108108	2

За формулою (1) визначаються коефіцієнти узгодженості, що відповідають кожному зі спектрів, а рівно і кожній із альтернатив: $K_1 = 0,7919$; $K_2 = 0,8272$; $K_3 = 0,7871$; $K_4 = 0,8085$. Найменший із показників узгодженості альтернатив вважається значенням показника узгодженості усієї МПП ($K_A = 0,7871$).

Пороги виявлення T_0 та застосування T_u для обраної шкали з 10-ма поділками визначаються як коефіцієнти узгодженості за формулою (1) для двох відповідних спектрів, зображених на рис. 2. Обчислені значення порогів наступні: $T_0 = 0,4067$ та $T_u = 0,7805$.

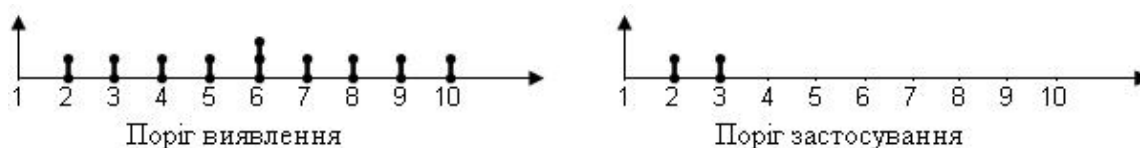


Рис. 2. Спектри для визначення порогів виявлення та застосування

Оскільки у даному прикладі $K_A > T_u$, то узгодженість МПП A вважаємо достатньою для агрегації експертних оцінок, тобто достатньою, щоб за даною матрицею визначити усереднені ваги альтернатив.

Тепер, для порівняння, визначимо показник узгодженості цієї самої вихідної МПП A традиційним способом, коли до спектрів альтернатив входять складові, визначені лише, наприклад, за рядками МПП. У такому випадку, до уваги буде братись інформація про наступні ідеально узгоджені матриці (див. табл. 2, 3): 1 — відповідає першому рядку МПП A ; 6 — відповідає другому рядку із A ; 12 — третьому та 16 — четвертому рядку. Спектри ваг альтернатив при застосуванні традиційного підходу зображені на рис. 3, і у порівнянні зі спектрами, зображеними на рис. 1, мають у своєму складі лише по 4 складові, що відповідає кількості альтернатив, які попарно порівнюються.

Визначені за формулою (1) коефіцієнти узгодженості наступні: $K'_1 = 0,6707$, $K'_2 = 0,8275$, $K'_3 = 0,7586$, $K'_4 = 0,6896$, і значення найменшого з них — це значення показника узгодженості усієї МПП ($K'_A = 0,6707$). У цьому випадку, як бачимо, $K'_A < T_u$, тому для можливості подальшої агрегації експертних оцінок із матриці, потрібно підвищити узгодженість, а для цього необхідно отримати згоду в експерта, що виконував парні порівняння альтернатив про зміну деяких із своїх оці-

нок. Тобто, результати визначення узгодженості, які отримані традиційним способом, у даному характерному прикладі, потребують запровадження зворотного зв'язку з експертом, що призводить до додаткових витрат експертних ресурсів.

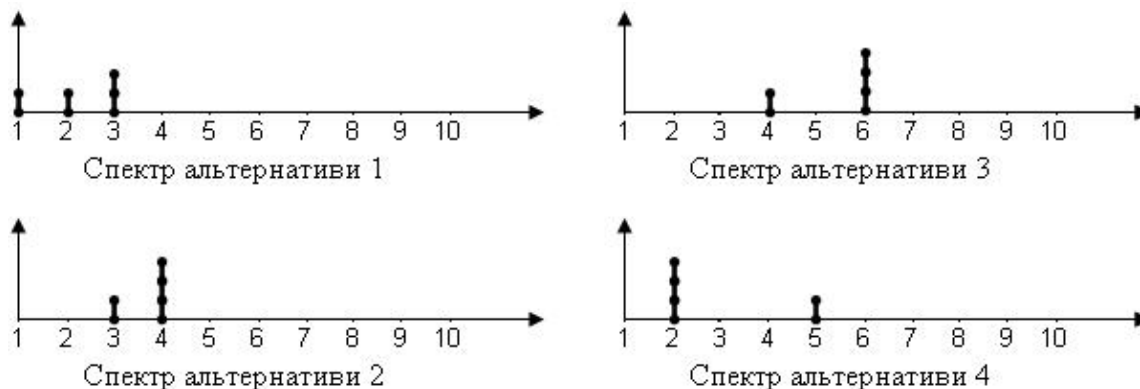


Рис. 3. Спектри ваг альтернатив при застосуванні традиційного підходу

Висновки

Запропонований у даній статті підхід до визначення показника узгодженості відрізняється більшою достовірністю порівняно з традиційним підходом завдяки найбільш повному використанню інформації про парні порівняння з матриці.

Характерний приклад показує, що в деяких випадках, керуючись запропонованим підходом до визначення показника узгодженості, виникає можливість скоротити кількість звернень до експертів за необхідності уточнення їхніх попередніх оцінок, а інколи, і взагалі уникати зворотного зв'язку з експертами, що суттєво скорочує витрати експертних ресурсів і підвищує ефективність процедур експертного оцінювання.

Вбачається, що особливо корисним є застосування даного підходу у випадках неповних парних порівнянь, коли кількість складових у відповідних спектрах альтернатив може значно скорочуватися при традиційному підході і, тим самим, ставити під сумнів достовірність визначення рівня узгодженості.

Застосування запропонованого підходу є необхідним при визначенні узгодженості методами, в яких для агрегації експертних оцінок застосовується комбінаторний підхід [10], особливо при організації групових експертиз.

Подальші дослідження у цьому напрямку планується зосередити на розповсюдженні запропонованого підходу на визначення узгодженості класу нечітких експертних оцінок.

1. Saaty T.L. Relative Measurement and Its Generalization in Decision Making; Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors; The Analytic Hierarchy/Network Process / T.L. Saaty // RACSAM. — 2008. — **102**(2). — P. 251–318.

2. Saaty T.L. Dispersion of Group Judgments / Thomas L. Saaty and Luis G. Vargas // Mathematical and Computer Modelling. — 2007, Oct. — Vol. 46(7–8). — P. 918–925.

3. *Totsenko V.G.* The Agreement Degree of Estimations Set with Regard of Experts Competency / *V.G. Totsenko* // Proc. of the Fourth Internation. Symp. on the Analytic Hierarchy Process, Simon Fraser University. — Vancouver (Canada). — 1996. — P. 229–241.
4. *Totsenko V.G.* Spectral Method for Determination of Consistency of Expert Estimate Sets / *V.G. Totsenko* // Engineering Simulation. — 2000. — 17. — P. 715–727.
5. *Тоценко В.Г.* Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. — К.: Наук. думка, 2002. — 382 с.
6. *Циганок В.В.* Комбінаторний алгоритм парних порівнянь зі зворотним зв'язком з експертом / *В.В. Циганок* // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2000. — Т. 2, № 2. — С. 92–102.
7. *Tsyganok V.V.* Investigation of the Aggregation Effectiveness of Expert Estimates Obtained by the Pairwise Comparison Method / *V.V. Tsyganok* // Mathematical and Computer Modelling. — August 2010. — Vol. 52, N 3–4. — P. 538–544.
8. *Cayley A.* A Theorem on Trees / *A. Cayley* // Quart. J. Math. — 1889. — 23. — P. 376–378.
9. *Tutte W.T.* Graph Theory / *W.T. Tutte* // Cambridge University Press. — 2001. — P. 138.
10. *Циганок В.В.* Агрегація групових експертних оцінок, що отримані у різних шкалах / *В.В. Циганок* // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2011. — Т. 13, № 4. — С. 74–83.

Надійшла до редакції 05.06.2012