

УДК 004.942

**Я. А. Калиновский**

Институт проблем регистрации информации НАН Украины  
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

## **Структура гиперкомплексного метода быстрого вычисления линейной свертки дискретных сигналов**

*Исследован метод быстрого вычисления линейной свертки числовых массивов длиной  $2^n$  с помощью представления их в специальных гиперкомплексных числовых системах, имеющих изоморфные им системы, выполнение гиперкомплексных операций в которых требует меньшего количества вещественных операций.*

**Ключевые слова:** гиперкомплексная числовая система, изоморфизм, свертка, базис, сложность вычислений.

### **Введение**

Линейная свертка дискретных сигналов является наиболее общей вычислительной задачей в области цифровой обработки сигналов. Радиолокационные системы, системы звуковой локации, обработка сейсмической информации, неразрушающий контроль и компьютерная томография, обработка изображений — этот даже очень далекий от полноты перечень областей использования линейной свертки дискретных сигналов дает представление о важности данной задачи.

Так как сложность вычисления линейной свертки массивов длиной  $n$  есть  $O(n^2)$ , и быстро увеличивается с ростом  $n$ , то используются методы «быстрых» вычислений. Одним из наиболее распространенных методов является свертка с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ) со сложностью  $O(n \log n)$ . В основе многочисленных алгоритмов БПФ лежит декомпозиция исходной задачи большой размерности в большое количество задач малой размерности. Поэтому весьма важной является разработка таких методов решения задач малой размерности, которые используют, возможно, меньшее число вещественных операций.

В соответствии с теоремой Винограда для линейной свертки [1] нижняя граница количества вещественных умножений равна  $2n - 1$ , что может быть ориентиром при оценке качества алгоритма. Однако, как отмечается в работе [2]: «Во многих случаях в качестве меры сложности вычислений берется количество ариф-

© Я. А. Калиновский

метических операций в алгоритме. Хотя и существует грубое соответствие между общей и арифметической сложностью алгоритма, все же практическая ценность вычислительного метода зависит от многих факторов. Эффективность алгоритма определяется не только числом операций, но и такими параметрами как число перемещений данных, стоимость вспомогательных операций, общая структурная сложность, различные возможности, представляемые используемой вычислительной системой, искусство программиста. Поэтому упорядочение алгоритмов по их действительной эффективности, выраженной временем выполнения, является весьма трудным делом, так что сравнения, основанные лишь на числе арифметических операций, должны быть «взвешены» с учетом факторов, возникающих при конкретных реализациях этих алгоритмов».

### Постановка задачи

Пусть необходимо выполнить линейную свертку двух числовых массивов длиной  $2^n$ . Будем рассматривать эти числовые массивы как компоненты гиперкомплексных чисел, принадлежащих некоторой гиперкомплексной числовой системе (ГЧС)  $G_1$  размерностью  $\dim G_1 = 2^n$ . Произведение этих чисел будет содержать парные произведения компонентов свертываемых числовых массивов. Однако они будут комбинироваться в суммы не в таком составе, как это нужно для организации компонентов свертки. Кроме того, число вещественных умножений при умножении гиперкомплексных чисел в общем случае равно  $2^{2n}$ , т.е. столько же, как и при прямом вычислении свертки, значит нет никакого выигрыша.

Таким образом, здесь возникают две проблемы: первая — это снижение количества вещественных операций при умножении гиперкомплексных чисел; вторая — организация выбора парных произведений компонентов свертки. Решение этих двух проблем позволяет синтезировать такие алгоритмы свертки, которые будут по количеству операций эффективнее других алгоритмов выполнения свертки.

Для решения первой проблемы можно перейти в такую ГЧС, изоморфную исходной, таблица умножения которой заполнена слабо. Такие пары ГЧС существуют и будут описаны ниже [4, 5]. Переход между такими ГЧС требует только выполнения операций сложения вещественных чисел.

Решение второй проблемы зависит от конкретного вида используемых ГЧС и будет рассмотрено далее.

### Гиперкомплексные числовые системы, применяемые при синтезе алгоритмов быстрой свертки

Наиболее распространенной и давно известной [3, 4] парой изоморфных сильно- и слабозаполненных ГЧС являются, принадлежащие алгебре двойных чисел ГЧС типа  $W$  и  $W_1$  (по классификации [4]), таблицы умножения которых имеют следующий вид:

$$W: \begin{array}{|c|c|c|} \hline W & e_0 & e_1 \\ \hline e_0 & e_0 & e_1 \\ \hline e_1 & e_1 & e_0 \\ \hline \end{array} \quad W_1: \begin{array}{|c|c|c|} \hline W_1 & f_0 & f_1 \\ \hline f_0 & f_0 & 0 \\ \hline f_1 & 0 & f_1 \\ \hline \end{array} . \quad (1)$$

Оператор изоморфизма систем  $W \simeq W_1$  выглядит таким образом:

$$\begin{aligned} e_0 &= f_0 + f_1, & f_0 &= (e_0 + e_1) / 2, \\ e_1 &= f_0 - f_1, & f_1 &= (e_0 - e_1) / 2. \end{aligned} \quad (2)$$

В работе [5] на основе процедуры Грассмана–Клиффорда [6] разработан метод построения пар изоморфных сильно- и слабозаполненных ГЧС, и выполнены построения для целого ряда систем. Приведем некоторые из них, которые при разработке алгоритмов быстрой свертки дают наибольший эффект по сокращению количества вещественных умножений.

Рассмотрим системы  $W^{(2)}(W, W, 4) \simeq W_1^{(2)}(W_1, W_1, 4)$ .

Смысл обозначений таков:  $W^{(2)}$  — идентификатор полученной ГЧС. Далее в скобках — идентификаторы систем, к которым применяется процедура удвоения. Последний операнд — размерность полученной ГЧС:

$$W^{(2)}(W, W, 4): \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline W^{(2)} & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_0 & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & e_1 & e_0 & e_3 & e_2 \\ \hline e_2 & e_2 & e_3 & e_0 & e_1 \\ \hline e_3 & e_3 & e_2 & e_1 & e_0 \\ \hline \end{array} \quad W_1^{(2)}(W_1, W_1, 4): \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline W_1^{(2)} & f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ \hline f_0 & f_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline f_1 & 0 & f_1 & 0 & 0 \\ \hline f_2 & 0 & 0 & f_2 & 0 \\ \hline f_3 & 0 & 0 & 0 & f_3 \\ \hline \end{array} . \quad (3)$$

Оператор изоморфизма систем  $W^{(2)} \simeq W_1^{(2)}$  следующий:

$$\begin{aligned} e_0 &= f_0 + f_1 + f_2 + f_3, & f_0 &= (e_0 + e_1 + e_2 + e_3) / 4, \\ e_1 &= f_0 - f_1 + f_2 - f_3, & f_1 &= (e_0 - e_1 + e_2 - e_3) / 4, \\ e_2 &= f_0 + f_1 - f_2 - f_3, & f_2 &= (e_0 + e_1 - e_2 - e_3) / 4, \\ e_3 &= f_0 - f_1 - f_2 + f_3, & f_3 &= (e_0 - e_1 - e_2 + e_3) / 4. \end{aligned} \quad (4)$$

Далее рассмотрим системы  $W^{(3)}(W^{(2)}(W, W, 4), W, 8) \simeq W_1^{(3)}(W_1^{(2)}(W_1, W_1, 4), W_1, 8)$ .

Системы  $W^{(3)}$  (или  $W_1^{(3)}$ ) получаются в результате удвоения систем  $W^{(2)}$  (или  $W_1^{(2)}$ ) системами  $W$  и  $W_1$  соответственно

$$W^{(3)}(W, W, W, 8):$$

| $W^{(3)}$ | $e_0$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $e_0$     | $e_0$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ |
| $e_1$     | $e_1$ | $e_0$ | $e_3$ | $e_2$ | $e_5$ | $e_4$ | $e_7$ | $e_6$ |
| $e_2$     | $e_2$ | $e_3$ | $e_0$ | $e_1$ | $e_6$ | $e_7$ | $e_4$ | $e_5$ |
| $e_3$     | $e_3$ | $e_2$ | $e_1$ | $e_0$ | $e_7$ | $e_6$ | $e_5$ | $e_4$ |
| $e_4$     | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ | $e_0$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| $e_5$     | $e_5$ | $e_4$ | $e_7$ | $e_6$ | $e_1$ | $e_0$ | $e_3$ | $e_2$ |
| $e_6$     | $e_6$ | $e_7$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_0$ | $e_1$ |
| $e_7$     | $e_7$ | $e_6$ | $e_5$ | $e_4$ | $e_3$ | $e_2$ | $e_1$ | $e_0$ |

(5)

Таблицу умножения ГЧС  $W_1^{(3)}$  не будем приводить из-за экономии места. Она имеет вид, аналогичный виду  $W_1^{(2)}(W_1, W_1, 4)$  из формулы (3), только имеет размеры  $8 \times 8$ .

Оператор изоморфизма систем  $W^{(3)} \simeq W_1^{(3)}$  имеет вид:

$$\begin{aligned}
 e_0 &= f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7, & f_0 &= (e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7) / 8, \\
 e_1 &= f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + f_4 - f_5 + f_6 - f_7, & f_1 &= (e_0 - e_1 + e_2 - e_3 + e_4 - e_5 + e_6 - e_7) / 8, \\
 e_2 &= f_0 + f_1 - f_2 - f_3 + f_4 + f_5 - f_6 - f_7, & f_2 &= (e_0 + e_1 - e_2 - e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7) / 8, \\
 e_3 &= f_0 - f_1 - f_2 + f_3 + f_4 - f_5 - f_6 + f_7, & f_3 &= (e_0 - e_1 - e_2 + e_3 + e_4 - e_5 - e_6 + e_7) / 8, \\
 e_4 &= f_0 + f_1 + f_2 + f_3 - f_4 - f_5 - f_6 - f_7, & f_4 &= (e_0 + e_1 + e_2 + e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7) / 8, \\
 e_5 &= f_0 - f_1 + f_2 - f_3 - f_4 + f_5 - f_6 + f_7, & f_5 &= (e_0 - e_1 + e_2 - e_3 - e_4 + e_5 - e_6 + e_7) / 8, \\
 e_6 &= f_0 + f_1 - f_2 - f_3 - f_4 - f_5 + f_6 + f_7, & f_6 &= (e_0 + e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 + e_6 + e_7) / 8, \\
 e_7 &= f_0 - f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + f_5 + f_6 - f_7, & f_7 &= (e_0 - e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5 + e_6 - e_7) / 8.
 \end{aligned}$$
(6)

Как было отмечено выше, подобные пары изоморфных ГЧС размерности  $2^n$  можно построить для любых  $n$ . Существуют пары изоморфных ГЧС и иной структуры. Однако, как будет показано, применение именно такого типа ГЧС дает наибольший эффект при построении алгоритмов свертки числовых массивов.

### Построение быстрых алгоритмов линейной свертки

Линейная свертка выполняется по формуле [1, 2, 7]:

$$z(k) = \sum_{m=-\infty}^k x(m)y(k-m). \quad (7)$$

Если рассматривается линейная свертка двух массивов длиной по  $2^n$  элементов, то при прямом вычислении ее  $2^{n+1} - 1$  отсчетов необходимо произвести  $2^{2n}$  вещественных умножений. С помощью гиперкомплексных числовых систем можно уменьшить это количество.

Рассмотрим иллюстративный пример. Пусть  $n = 1$ , т.е. вычисляется линейная свертка двух числовых массивов —  $\{x_0, x_1\}$  и  $\{y_0, y_1\}$ . В соответствии с (7) свертка будет иметь три отсчета:

$$\begin{aligned} z(-1) &= x_0 y_0, \\ z(0) &= x_0 y_1 + x_1 y_0, \\ z(1) &= x_1 y_1. \end{aligned} \tag{8}$$

Как видно из (8), для выполнения данной свертки необходимо выполнить 4 вещественных умножения.

Будем рассматривать элементы массивов  $\{x_0, x_1\}$  и  $\{y_0, y_1\}$  как компоненты гиперкомплексных чисел ГЧС  $W$  (1):

$$X = x_0 e_0 + x_1 e_1, \tag{9}$$

$$Y = y_0 e_0 + y_1 e_1. \tag{10}$$

Второе число записано в инверсном виде.

В соответствии с таблицей умножения ГЧС  $W$

$$XY = (x_0 y_1 + x_1 y_0) e_0 + (x_0 y_0 + x_1 y_1) e_1. \tag{11}$$

Правая часть выражения (11) содержит все парные произведения, необходимые для формирования свертки (8). Более того, компонента при  $e_0$  полностью совпадает с отсчетом  $z(1)$ , а компонента при  $e_1$  равна сумме остальных отсчетов. Но количество вещественных умножений также равно 4, как и в (8). Таким образом, возникают две проблемы: во-первых, нужно уменьшить число умножений в (11), и, во-вторых — разделить отсчеты  $z(0)$  и  $z(2)$ .

Для уменьшения количества умножений целесообразно перейти из системы  $W$  в систему  $W_1$ . Тогда для перевода чисел в числа  $X_1, Y_1 \in W_1$  необходимо в (9) и (10) подставить левые преобразования (2). Отсюда:

$$X_1 = (x_0 + x_1) f_0 + (x_0 - x_1) f_1, \tag{12}$$

$$Y_1 = (y_1 + y_0) f_0 + (y_1 - y_0) f_1. \tag{13}$$

Такой переход требует дополнительно 4 сложения. Однако, учитывая, что обычно числовой массив сворачивается с постоянным ядром, переход элементов которого в  $W_1$  сделан заранее, то можно считать, что переход из системы  $W$  в систему  $W_1$  требует только 2 сложения.

Умножение чисел (12) и (13) в соответствии с таблицей умножения  $W_1$

$$X_1 Y_1 = \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 = (x_0 + x_1)(y_1 + y_0) f_0 + (x_0 - x_1)(y_1 - y_0) f_1 \tag{14}$$

требует 2 умножения.

Обратный переход из  $W_1$  в систему  $W$  в соответствии с правым преобразованием (2) будет иметь вид:

$$XY = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} e_0 + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2} e_1, \quad (15)$$

что также требует 2 сложения. Деление на 2 — это короткая операция, требующая только сдвига регистра. Поэтому ее можно не учитывать.

Приравнивая правые части (11) и (15), получим:

$$x_0 y_1 + x_1 y_0 = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}, \quad (16)$$

$$x_0 y_0 + x_1 y_1 = \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}. \quad (17)$$

Если вычислить заранее одно из слагаемых в левой части (17), например,  $x_0 y_0$ , то компоненты свертки (8) будут вычисляться по следующим формулам:

$$\begin{aligned} z(-1) &= x_0 y_0, \\ z(0) &= \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}, \\ z(1) &= \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2} - x_0 y_0, \end{aligned} \quad (18)$$

что требует 3 умножения и 5 сложений. При расчетах по (8) требуется соответственно 4 умножения и 1 сложение. В данном случае эффект скорее отрицательный. Этот пример, как было отмечено выше, носит чисто иллюстративный характер для демонстрации идеи. Однако, как будет показано далее, при возрастании длины сворачиваемого массива эффект становится положительным.

Для наглядного отображения структуры вычислений построим в координатах  $x_0 y$  парные произведения элементов обоих массивов (рис. 1). Значку  $\otimes$  соответствует парное произведение, полученное в результате перемножения гиперкомплексных чисел, значку  $\times$  — непосредственно вычисляемое произведение. Пустая клетка соответствует парному произведению, при вычислении которого не нужно умножение элементов массива.

|   |           |           |   |
|---|-----------|-----------|---|
|   | 0         | 1         |   |
| 0 | $\times$  | $\otimes$ | y |
| 1 | $\otimes$ |           |   |
|   | x         |           |   |

Рис. 1. Структура вычислительного процесса при  $n = 1$

Пусть  $n = 2$ , т.е. вычисляется линейная свертка двух числовых массивов —  $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$  и  $\{y_0, y_1, y_2, y_3\}$ . В соответствии с (7) свертка будет иметь 7 отсчетов:

$$\begin{aligned} z(-3) &= x_0 y_0, \\ z(-2) &= x_0 y_1 + x_1 y_0, \\ z(-1) &= x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0, \\ z(0) &= x_0 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_0, \\ z(1) &= x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_1, \\ z(2) &= x_2 y_3 + x_3 y_2, \\ z(3) &= x_3 y_3. \end{aligned} \tag{19}$$

Для выполнения данной свертки необходимо выполнить 16 вещественных умножений и 9 сложений.

Будем рассматривать элементы массивов  $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$  и  $\{y_0, y_1, y_2, y_3\}$  как компоненты гиперкомплексных чисел ГЧС  $W^{(2)}(3)$ :

$$X = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3. \tag{20}$$

$$Y = y_3 e_0 + y_2 e_1 + y_1 e_2 + y_0 e_3. \tag{21}$$

Тогда в соответствии с таблицей умножения ГЧС  $W^{(2)}$  произведение (20) и (21) имеет вид:

$$XY = \sum_{i=0}^3 \alpha_i e_i, \tag{22}$$

где компоненты  $\alpha_i$  таковы:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= x_0 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_0, \\ \alpha_1 &= x_0 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_0 + x_3 y_1, \\ \alpha_2 &= x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2 y_3 + x_3 y_2, \\ \alpha_3 &= x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3. \end{aligned} \tag{23}$$

Для уменьшения количества умножений целесообразно перейти из системы  $W^{(2)}$  в систему  $W_1^{(2)}$ . Тогда для перевода чисел  $W^{(2)}$  в числа  $W_1^{(2)}$  необходимо в (20) и (21) подставить левые преобразования (3), откуда:

$$\begin{aligned} X_1 = \sum_{i=0}^3 \beta_i f_i &= (x_0 + x_1 + x_2 + x_3) f_0 + (x_0 - x_1 + x_2 - x_3) f_1 + \\ &+ (x_0 + x_1 - x_2 - x_3) f_2 + (x_0 - x_1 - x_2 + x_3) f_3. \end{aligned} \tag{24}$$

Аналогично и  $Y_1$ :

$$Y_1 = \sum_{i=0}^3 \gamma_i f_i. \quad (25)$$

Такой переход требует дополнительно 16 сложений. Однако, учитывая, что обычно числовой массив сворачивается с постоянным ядром, переход элементов которого в  $W_1$  сделан заранее, то можно считать, что переход из системы  $W^{(2)}$  в систему  $W_1^{(2)}$  требует только 8 сложений.

Умножение чисел (24) и (25) в соответствии с таблицей умножения  $W_1^{(2)}$

$$X_1 Y_1 = \sum_{i=0}^3 \beta_i \gamma_i f_i \quad (26)$$

требует всего лишь 4 умножения.

Обратный переход в соответствии с правым преобразованием (3) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} XY = \sum_{i=0}^3 \alpha_i e_i = & \frac{1}{4}(\beta_0 \gamma_0 + \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3) e_0 + \frac{1}{4}(\beta_0 \gamma_0 - \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 - \beta_3 \gamma_3) e_1 + \\ & + \frac{1}{4}(\beta_0 \gamma_0 + \beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2 - \beta_3 \gamma_3) e_2 + \frac{1}{4}(\beta_0 \gamma_0 - \beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3) e_3, \end{aligned} \quad (27)$$

что требует 8 сложений. Деление на 4 — это короткая операция, требующая только сдвига регистра. Поэтому ее можно не учитывать.

Тогда вычисления отсчетов свертки с указанием количества умножений ( $M$ ) и сложений ( $A$ ) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} z(-3) &= x_0 y_0 & -1M, \\ z(-2) &= x_0 y_1 + x_1 y_0 & -2M + 1A, \\ z(-1) &= x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0 & -3M + 2A, \\ z(0) &= \alpha_0 & -4M, \\ z(1) &= \alpha_1 - (x_0 y_2 + x_2 y_0) + x_2 y_2 & 1M + 2A, \\ z(2) &= \alpha_2 - (x_0 y_1 + x_1 y_0) & -1A, \\ z(3) &= \alpha_3 - (x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2) & -3A. \end{aligned} \quad (28)$$

Итого 11 умножений и 25 сложений (здесь учтены также 16 сложений, необходимых для перехода из  $W^{(2)}$  в  $W_1^{(2)}$  и обратно).

Построим диаграмму структуры вычислительного процесса подобно предыдущему случаю (рис. 2).



|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
|   | 0 | 1 | 2 | 3 |   |
| 0 | × | × | × | ⊗ | y |
| 1 | × | × | ⊗ |   |   |
| 2 | × | ⊗ | × |   |   |
| 3 | ⊗ |   |   |   |   |
|   | x |   |   |   |   |

Рис. 2. Структура вычислительного процесса при  $n = 2$

Рассмотрим случай  $n = 3$ , то есть вычисление линейной свертки двух числовых массивов –  $\{x_0, \dots, x_7\}$  и  $\{y_0, \dots, y_8\}$ . В соответствии с (7) свертка будет иметь 15 отсчетов, выражения которых показаны на рис. 3.

$$\begin{aligned}
 z(-7) &= x_0 y_0 \\
 z(-6) &= x_0 y_1 + x_1 y_0 \\
 z(-5) &= x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0 \\
 z(-4) &= x_0 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_0 \\
 z(-3) &= x_0 y_4 + x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_1 + x_4 y_0 \\
 z(-2) &= x_0 y_5 + x_1 y_4 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_4 y_1 + x_5 y_0 \\
 z(-1) &= x_0 y_6 + x_1 y_5 + x_2 y_4 + x_3 y_3 + x_4 y_2 + x_5 y_1 + x_6 y_0 \\
 z(0) &= x_0 y_7 + x_1 y_6 + x_2 y_5 + x_3 y_4 + x_4 y_3 + x_5 y_2 + x_6 y_1 + x_7 y_0 \\
 z(1) &= x_1 y_7 + x_2 y_6 + x_3 y_5 + x_4 y_4 + x_5 y_3 + x_6 y_2 + x_7 y_1 \\
 z(2) &= x_2 y_7 + x_3 y_6 + x_4 y_5 + x_5 y_4 + x_6 y_3 + x_7 y_2 \\
 z(3) &= x_3 y_7 + x_4 y_6 + x_5 y_5 + x_6 y_4 + x_7 y_3 \\
 z(4) &= x_4 y_7 + x_5 y_6 + x_6 y_5 + x_7 y_4 \\
 z(5) &= x_5 y_7 + x_6 y_6 + x_7 y_5 \\
 z(6) &= x_6 y_7 + x_7 y_6 \\
 z(7) &= x_7 y_7
 \end{aligned}$$

Рис. 3. Выражения отсчетов свертки для массивов длиной  $2^3$

Для выполнения данной свертки необходимо выполнить 64 вещественных умножения и 49 сложений.

Как и в предыдущих случаях ( $n = 1, 2$ ), можно воспользоваться изоморфными ГЧС 8-й размерности  $W^{(3)} \simeq W_1^{(3)}$ , оператор изоморфизма которых имеет вид (6).

Далее:

$$X = \sum_{i=0}^7 x_i e_i, \quad (30)$$

$$Y = \sum_{i=0}^7 y_{7-i} e_i. \quad (31)$$

В соответствии с таблицей умножения ГЧС  $W^{(3)}$  произведение (30) и (31) имеет вид:

$$XY = \sum_{i=0}^7 \alpha_i e_i,$$

где компоненты  $\alpha_i$  следующие:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= x_0 y_7 + x_1 y_6 + x_2 y_5 + x_3 y_4 + x_4 y_3 + x_5 y_2 + x_6 y_1 + x_7 y_0, \\ \alpha_1 &= x_0 y_6 + x_1 y_7 + x_2 y_4 + x_3 y_5 + x_4 y_2 + x_5 y_3 + x_6 y_0 + x_7 y_1, \\ \alpha_2 &= x_0 y_5 + x_1 y_4 + x_2 y_7 + x_3 y_6 + x_4 y_1 + x_5 y_0 + x_6 y_3 + x_7 y_2, \\ \alpha_3 &= x_0 y_4 + x_1 y_5 + x_2 y_6 + x_3 y_7 + x_4 y_0 + x_5 y_1 + x_6 y_2 + x_7 y_3, \\ \alpha_4 &= x_0 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_0 + x_4 y_7 + x_5 y_6 + x_6 y_5 + x_7 y_4, \\ \alpha_5 &= x_0 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_0 + x_3 y_1 + x_4 y_6 + x_5 y_7 + x_6 y_4 + x_7 y_5, \\ \alpha_6 &= x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_4 y_5 + x_5 y_4 + x_6 y_7 + x_7 y_6, \\ \alpha_7 &= x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + x_5 y_5 + x_6 y_6 + x_7 y_7. \end{aligned} \quad (32)$$

Тогда для перевода чисел из  $W^{(3)}$  в числа  $W_1^{(3)}$  необходимо в (30) и (31) подставить левые преобразования (6). Соответственно получаем:

$$\begin{aligned} X_1 = \sum_{i=0}^7 \beta_i f_i &= (x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) f_0 + \\ &+ (x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 - x_7) f_1 + \\ &+ (x_0 + x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - x_6 - x_7) f_2 + \\ &+ (x_0 - x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 + x_7) f_3 + \\ &+ (x_0 + x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7) f_4 + \\ &+ (x_0 - x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7) f_5 + \\ &+ (x_0 + x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + x_6 + x_7) f_6 + \\ &+ (x_0 - x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 - x_7) f_7. \end{aligned} \quad (33)$$

Аналогично и  $Y_1$ :

$$Y_1 = \sum_{i=0}^7 \gamma_i f_i. \quad (34)$$

Такой переход требует дополнительно 32 сложения.

Умножение чисел (33) и (34) в соответствии с таблицей умножения  $W_1^{(3)}$

$$X_1 Y_1 = \sum_{i=0}^7 \beta_i \gamma_i f_i \quad (35)$$

требует всего лишь 8 умножений.

Обратный переход из  $W_1^{(3)}$  в систему  $W^{(3)}$  осуществляется в соответствии с правым преобразованием (6). Он требует 32 сложения. Деление на 8 — это короткая операция, требующая только сдвига регистра. Поэтому ее можно не учитывать.

Можно подсчитать, что в этом случае требуется 45 умножений и 118 сложений (здесь учтены также 64 сложения, необходимых для перехода из  $W^{(2)}$  в  $W_1^{(2)}$  и обратно).

Построим диаграмму структуры вычислительного процесса подобно предыдущему случаю (рис. 4).

|   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | × | × | × | × | × | × | × | ⊗ | y |
| 1 | × | × | × | × | × | × | ⊗ |   |   |
| 2 | × | × | × | × | × | ⊗ | × |   |   |
| 3 | × | × | × | × | ⊗ |   |   |   |   |
| 4 | × | × | × | ⊗ | × | × | × |   |   |
| 5 | × | × | ⊗ |   | × | × |   |   |   |
| 6 | × | ⊗ | × |   | × |   | × |   |   |
| 7 | ⊗ |   |   |   |   |   |   |   |   |
| x |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

Рис. 4. Структура вычислительного процесса при  $n = 3$

Совершенно аналогично могут быть построены вычислительные процессы и для более длинных массивов ( $n > 3$ ), так как необходимые для этого ГЧС существуют [9].

Как было отмечено выше, при обратных переходах  $W_1^{(i)} \Rightarrow W^{(i)}$  компоненты чисел необходимо делить на  $2^i$ . Это короткая операция, но даже ее можно устранить, поделив заранее постоянные для данной свертки компоненты массива  $Y$  на  $2^i$  (в работах [1, 2] этот прием называется «спрятать двойку в ядро»).

Из вышеприведенных оценок следует, что предложенный метод позволяет при вычислении линейной свертки значительно снизить количество умножений, как это показано в таблице.

Зависимость количества умножений от длины массива

| № | Длина массива | Полное число умножений | Снижение числа умножений по алгоритму | То же в % |
|---|---------------|------------------------|---------------------------------------|-----------|
| 1 | 2             | 4                      | 1                                     | 25        |
| 2 | 4             | 16                     | 5                                     | 31,3      |
| 3 | 8             | 64                     | 19                                    | 30        |

Как видно из таблицы, по мере увеличения длины массива эффективность метода снижается.

### Ускоренный алгоритм линейной свертки с помощью ГЧС

При линейной свертке массивов  $2 \times 2$  (то есть  $n=1$ ) число умножений уменьшить нельзя, как это следует из теоремы Винограда [1, 2]. Дальнейшее уменьшение числа умножений при вычислении линейной свертки массивов большей длины может быть достигнуто, по крайней мере, двумя методами.

Первый — это полная декомпозиция задачи свертки массивов  $2^n \times 2^n$  на  $2^m$  задач свертки массивов  $2^{n-m} \times 2^{n-m}$ . Так, например, свертку массивов  $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$  и  $\{y_0, y_1, y_2, y_3\}$  можно свести к 4-м сверткам массивов  $\{x_0, x_1\}$  и  $\{y_0, y_1\}$ ,  $\{x_0, x_1\}$  и  $\{y_2, y_3\}$ ,  $\{x_2, x_3\}$  и  $\{y_0, y_1\}$ ,  $\{x_2, x_3\}$  и  $\{y_2, y_3\}$ , как это показано на схеме вычислительного процесса (рис. 5):

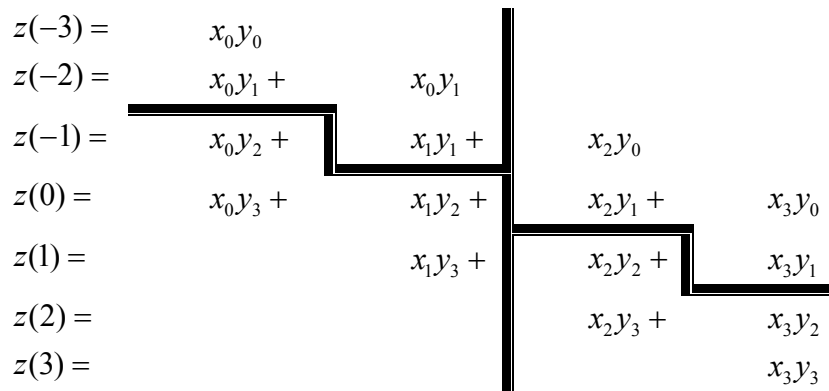


Рис. 5. Декомпозиция задачи

При этом число умножений будет  $3 \cdot 4 = 12$ , что хуже предыдущего алгоритма свертки массивов  $4 \times 4$ . Кроме того, добавится 5 дополнительных сложений для стыковки четырех свертки.

Второй метод — это частичная декомпозиция задачи. Рассмотрим его на примере свертки массивов  $4 \times 4$ . Здесь целесообразно сначала сделать свертку массивов  $\{x_0, x_1\}$  и  $\{y_0, y_1\}$ . На это уйдет 3 умножения, и будут получены значения  $x_1 y_1$  и  $x_0 y_1 + x_1 y_0$ . При этом полученное при преобразовании значение  $x_0 + x_1$  может быть использовано в дальнейшем, сокращая количество сложений. Далее выполняется свертка массивов  $\{x_0, x_2\}$  и  $\{y_0, y_2\}$ . На это уже необходимо только 2 ум-

ножения и будут получены значения  $x_2y_2$  и  $x_0y_2 + x_2y_0$ , которые используются в дальнейшем. Для выполнения этих действий, как легко рассчитать, необходимо произвести 5 умножений. Далее вычислительный процесс строится так же, как и ранее.

Как можно рассчитать, всего необходимо выполнить 9 умножений и 30 сложений (здесь учтены также 5 умножений и 10 сложений для сверток  $2 \times 2$ , а также 14 сложений, необходимых для перехода из  $W^{(2)}$  в  $W_1^{(2)}$  и обратно).

Рассмотрим процесс вычисления линейных сверток для массивов  $8 \times 8$ . Здесь целесообразно сначала рассчитать парное произведение  $x_0y_0$ , затем выполнить свертки массивов  $\{x_0, x_1\}$  и  $\{y_0, y_1\}$ ,  $\{x_0, x_2\}$  и  $\{y_0, y_2\}, \dots, \{x_0, x_6\}$  и  $\{y_0, y_6\}$ , на что необходимо затратить 13 умножений и 24 сложения. После этого производится перевод числа  $X$  из  $W^{(3)}$  в числа  $W_1^{(3)}$ , на что требуется 30 сложений. Умножение в  $W_1^{(3)}$  требует 8 вещественных умножений. Обратный переход из  $W_1^{(3)}$  в систему  $W^{(3)}$  требует 32 сложения. Далее вычислительный процесс строится так же, как и в предыдущем случае, но количество операций изменится:

$$\begin{array}{ll}
 z(-7) = x_0y_0 & - \\
 z(-6) = x_0y_1 + x_1y_0 & - \\
 z(-5) = x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0 & 1A \\
 z(-4) = x_0y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_0 & 2M + 2A \\
 z(-3) = x_0y_4 + x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1 + x_4y_0 & 2M + 3A \\
 z(-2) = x_0y_5 + x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1 + x_5y_0 & 4M + 4A \\
 z(-1) = x_0y_6 + x_1y_5 + x_2y_4 + x_3y_3 + x_4y_2 + x_5y_1 + x_6y_0 & 4M + 5A \\
 z(0) = \alpha_0 & - \\
 z(1) = \alpha_1 - (x_0y_6 + x_2y_4 + x_4y_2 + x_6y_0) + x_2y_6 + x_4y_4 + x_6y_2 & 2M + 3A \\
 z(2) = \alpha_2 - (x_0y_5 + x_1y_4 + x_4y_1 + x_5y_0) + x_4y_5 + x_5y_4 & 2M + 2A \\
 z(3) = \alpha_3 - (x_0y_4 + x_1y_5 + x_2y_6 + x_4y_0 + x_5y_1 + x_6y_2) + x_4y_6 + x_5y_5 + x_6y_4 & 4M + 6A \\
 z(4) = \alpha_4 - (x_0y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_0) & 2A \\
 z(5) = \alpha_5 - (x_0y_2 + x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1 + x_4y_6 + x_6y_4) + x_6y_6 & 1M + 4A \\
 z(6) = \alpha_6 - (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_5 + x_5y_4) & 2A \\
 z(7) = \alpha_7 - (x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5 + x_6y_6) & 7A
 \end{array}$$

Итого требуется 44 умножения и 127 сложений. Однако, если вернуться к результатам алгоритма частичной декомпозиции при линейной свертке  $4 \times 4$  ( $9M + 30A$ ), то окажется, что задачу для массивов  $8 \times 8$  выгоднее решать полной декомпозицией на 4 задачи для массивов  $4 \times 4$ . С учетом 13 операций сложения для стыковки в этом случае для линейной свертки массивов  $8 \times 8$  необходимо всего 36 умножений и 140 сложений.

Таким образом, при синтезе алгоритмов линейной свертки для больших массивов требуется рассматривать различные варианты структуры алгоритма.

## Выводы

Полученные результаты говорят о том, что с помощью представления цифровых сигналов в виде гиперкомплексных чисел можно построить простые по структуре алгоритмы вычисления линейных сверток с очень высокими характеристиками по объему вычислений.

1. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов / Р. Блейхут. — М.: Мир, 1989. — 449 с.
2. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток / Г. Нуссбаумер. — М.: Радио и связь, 1985. — 248 с.
3. Кантор И.Л. Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. — М.: Наука, 1973. — 144 с.
4. Синьков М.В. Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Ю.Е. Бояринова, Я.А. Калиновский. — К.: Инфодрук, 2010. — 388 с.
5. Калиновский Я.А. Высокорамерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений / Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова. — К.: Инфодрук, 2012. — 183 с.
6. Chaitin-Chatelin F. Computation with Hypercomplex Numbers [Электронный ресурс] / Chaitin-Chatelin F., Meskauskas T., Zaoui A. // GERFACS Technical Report TR/PA/00/69. — Режим доступа: <http://www.gerfacs.fr> (2000)
7. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко. — СПб.: Питер, 2003. — 604 с.
8. Бояринова Ю.Е. Построение высокоразмерных гиперкомплексных числовых систем с помощью процедуры умножения размерности / Ю.Е. Бояринова // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2011. — Т. 13, № 3. — С. 30–39.
9. Царёв А. Алгоритм умножения октонионов / А. Царёв, Г. Царёва // Известия ВУЗов. Радиоэлектроника. — 2012. — Т. 55, № 10. — С. 44–54.
10. Петухов С.В. Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость / С.В. Петухов. — М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2008. — 316 с.

Поступила в редакцию 13.02.2013